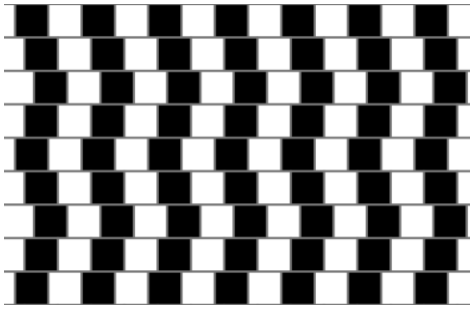
GEOMETRÍA AXIOMÁTICA



Gerard Romo Garrido

TeeMates
Cool·lección

Toomates Cool·lección

Los documentos de **Toomates Cool·lección** son recopilaciones de materiales matemáticos, redactados, ordenados y sistematizados por **Gerard Romo**, con el objetivo de que puedan ser útiles para cualquier estudioso de las matemáticas.

"**Always Under Construction**": Debido a lo ambicioso del proyecto, estos documentos se van ampliando, corrigiendo y completando incesantemente a lo largo de los años.

Se agradecerá cualquier observación, comentario, rectificación o colaboración a
toomates@gmail.com

Este documento se comparte bajo una licencia "**Creative Commons**": Se permite cualquier uso, reproducción y edición de todos estos materiales siempre que sea sin ánimo de lucro y se cite su procedencia.

Todos los documentos se ofrecen en dos versiones: En formato "**pdf**" para una cómoda lectura y en el formato "**doc**" de MSWord para permitir y facilitar su edición.

Actualmente Toomates Cool·lección consta de los siguientes documentos:

Geometría Axiomática	pdf	doc1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
Problemas de Geometría	pdf	doc
Problemas de Matemáticas	pdf	doc
Cangur Integral (en catalán)	pdf	doc
Geometría Proyectiva Teoría	pdf	doc1 2 3 4 5 6 7

Matemáticas para el bachillerato (en catalán):

Àlgebra Lineal Batxillerat	pdf	doc
Geometria Lineal Batxillerat	pdf	doc
Càlcul Infinitesimal Batxillerat	pdf	doc
Programació Lineal Batxillerat	pdf	doc

En Preparación:

Geometría Hiperbólica	pdf	doc1 2 3
Geometría Proyectiva Práctica	pdf	doc
Álgebra Lineal Método Jordan	pdf	doc
Geometría Afín	pdf	doc

Versión de este documento: 11/11/2017

www.toomates.net

Primera parte: Geometría neutral.

1 Incidencia.

1.1 Los axiomas de incidencia. Planos incidentales.
1.2 Planos finitos triviales.
1.3 El plano de Fano.
1.4 El plano de Young.

2 Orden.

2.1 Los axiomas de orden. Planos ordenados. Segmentos y semirrectas.
2.2 Semiplanos.
2.3 Relación de orden entre cuatro puntos.
2.4 Ángulos.
2.5 Ordenación de semirrectas con extremo común.
2.6 El teorema Crossbar y aplicaciones.
2.7 Ángulos suplementarios.
2.8 Polígonos. Triángulos. Cuadriláteros. Cuadriláteros regulares.

3 Congruencia.

3.1 Los axiomas de congruencia. Planos métricos.
3.2 Congruencia y comparación de segmentos.
3.3 Congruencia de ángulos.
3.4 Comparación de ángulos.
3.5 Ángulos rectos y rectas perpendiculares.
3.6 El teorema de los ángulos internos alternos.
3.7 Teorema del ángulo exterior.
3.8 Congruencia de triángulos.
3.9 Puntos medios, mediatrices, bisectrices, medianas y alturas.
3.10 Rectas y puntos notables del triángulo (1).
3.11 Congruencia de cuadriláteros.
3.12 Cometas.

4 Medición.

4.1 Conjuntos convexos.
4.2 Particiones de Dedekind. Puntos de corte. Axioma de Dedekind.
4.3 Circunferencias.
4.4 Multiplicación de segmentos. Postulado de Arquímedes.
4.5 División de segmentos. Segmentos diádicos.
4.6 Distancia entre puntos de una semirrecta.
4.7 Longitud de segmentos.
4.8 Amplitud de ángulos.

5 Paralelismo.

5.1 Suma angular y defecto de triángulos. El teorema Saccheri-Legendre.
5.2 Suma angular y defecto de cuadriláteros.
5.3 Las condiciones euclidianas principales. Plano euclídeo.
5.4 El teorema del Defecto Cero de Legendre.
5.5 Otras condiciones euclídeas.

Segunda parte: Geometría euclídea.

6 Paralelogramos.

6.1 Paralelogramos.
6.2 Rectas y puntos notables del triángulo (2).
6.3 Rectángulos.
6.4 Rombos.
6.5 Cuadrados.
6.6 Proyección paralela.

7 Semejanza.

7.1 Definición axiomática de área.
7.2 Triángulos semejantes.
7.3 El teorema de Tales.
7.4 El teorema de Pitágoras.
7.5 Algunas figuras notables.
7.6 Tijeras-congruencia de polígonos.

8 Trigonometría.

8.1 Las razones trigonométricas.
8.2

9 Circunferencias.

9.1 Ángulos inscritos y cuerdas.
9.2 Polígonos regulares.
9.3 Área del círculo y longitud de la circunferencia. El número Pi.
9.4 Inversiones.
9.5 Cuadriláteros cíclicos.
9.6 La razón áurea.

10 Teoremas de Ceva, Menelao, Desargues y Pappus.

10.1 Cevianas. Teoremas de Ceva y Menelao y su equivalencia.
10.2 Rectas y puntos notables del triángulo (3).
10.3 Teoremas de Desargues y Pappus.

11 Transformaciones euclídeas.

11.1 Isometrías.
11.2 Translaciones.
11.3 Rotaciones.
11.4 Simetrías.
11.5 Dilataciones.

12 Sistemas axiomáticos.

12.1 Recopilatorio de axiomas de la geometría euclídea.
12.2 Fundamentos de la Geometría de Hilbert.
12.3 Los Elementos de Euclides.
12.4 SMSG Axioms for Euclidean Geometry.
12.5 Birkhoff's Axioms for Euclidean Geometry.

Tercera parte: Fundamentos de las matemáticas.

13 Teoría de conjuntos.

1.1 Nociones básicas.
1.2 Funciones.
1.3 Relaciones de equivalencia.
1.4 Relaciones de orden.
1.5 Cortes. Cortes de Dedekind. Conjuntos completos.
1.6 Completación de conjuntos.

14 Los números naturales.

2.1 Los números naturales.

15 Los números enteros.

3.1
3.2
3.3
3.4

16 Los números racionales.

4.1
4.2
4.3
4.4

17 Los números reales.

5.1
5.2
5.3
5.4

18 Los números complejos.

6.1
6.2

Otras veces toca preguntar al chico, para tormento del padre.
"Papá, ¿por qué no tienen barba las mujeres?" A punto estuvo
Carrascal de responder: "Porque las tienen los hombres;
para diferenciarse en la cara", pero se calló.
-Mira, hijo, en un triángulo que tenga dos ángulos desiguales,
a mayor ángulo se opone mayor lado...
-Sí, ya lo veo, papá.
-No basta que lo veas, hay que demostrártelo.
-¡Pero si lo veo...!
-No importa; ¿de qué sirve que veamos las cosas si no nos las
demuestran?

Miguel de Unamuno, Amor y pedagogía (1901)

1 Incidencia.

1.1 Los axiomas de incidencia. Planos incidentales.

1.1.1 Definición. Plano. Geometría plana.

Un plano (o una geometría plana) es un par (Ω, L) donde Ω es un conjunto de elementos llamados **puntos** y L es una colección de subconjuntos de Ω llamados **rectas.** Estos puntos y rectas están sometidos a un conjunto de condiciones llamadas **axiomas**. Cada conjunto concreto de objetos matemáticos que verifique los axiomas constituye un **modelo** de la Geometría.

1.1.2 Definición. Plano incidental.

Un **plano incidental** es un plano que cumple los siguientes axiomas, llamados "Axiomas de incidencia":

Axioma I1. El axioma de incidencia. (Elementos, Postulado 1)
Si A y B son dos puntos diferentes, existe una única recta r tal que $A \in r$ y $B \in r$. Denotaremos por $\overleftrightarrow{AB}$ la única recta que pasa por A y B.

Axioma I2.
En toda recta hay al menos dos puntos diferentes.

Axioma I3. El axioma de existencia.
Existirán tres puntos A, B y C diferentes que no están contenidos en la misma recta, es decir, que si r es una recta, al menos uno de ellos no pertenece a r.

1.1.3 Proposición.

Sean los puntos P y Q. Entonces:

a) $P, Q \in \overleftrightarrow{PQ}$.

b) Si $P \neq Q$ y r pasa por P y Q entonces $r = \overleftrightarrow{PQ}$.

c) $\overleftrightarrow{PQ} = \overleftrightarrow{QP}$.

Demostración. Se derivan directamente del axioma I1.

1.1.4 Proposición.

Toda recta r se puede escribir como $\overleftrightarrow{PQ}$ para ciertos puntos P y Q diferentes.

Demostración. Basta aplicar el axioma I2 y después la proposición 1.1.3.

1.1.5 Definición. Puntos colineales.

Diremos que los n puntos $P_1, P_2, ..., P_n$ son colineales cuando exista una recta r tal que $P_k \in r$ para todo k.

1.1.6 Proposición.

Existen al menos tres puntos no colineales.

Demostración. Es una interpretación del axioma I3.

1.1.7 Definición. Rectas concurrentes.
Diremos que las n rectas $r_1, r_2, ..., r_n$ son concurrentes si existe un punto P tal que $P \in r_k$ para todo k.

1.1.8 Proposición.
Dos rectas diferentes se cortan como mucho en un punto. Dos rectas diferentes concurrentes se cortan en un único punto.

Demostración. Sean r y s dos rectas diferentes. Supongamos que se cortan en dos puntos diferentes P y Q. Entonces, aplicando 1.1.3 os veces, $r = \overleftrightarrow{PQ} = s$, absurdo.
Dos rectas diferentes concurrentes se cortan en algún punto puesto que son concurrentes, y no más de un punto puesto que son diferentes.

1.1.9 Ejercicio.
Demostrar que el plano no está vacío, y por tanto nuestra geometría no es trivial. Debes usar un único axioma.

Demostración. El axioma I3 garantiza que existen al menos tres puntos diferentes.

1.1.10 Ejercicio.
Demostrar que existen rectas en el plano. Debes usar dos únicos axiomas.

Demostración. El axioma I3 garantiza la existencia de tres puntos diferentes. Tomando dos, el axioma I1 garantiza la existencia de una recta que pasa por ambos.

1.1.11 Ejercicio.
Supongamos que P, Q y R son puntos y $P \neq Q$. Entonces P, Q y R son colineales si y sólo si R pertenece a $\overleftrightarrow{PQ}$.

Demostración: Si $P \neq Q$, la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ será la única recta que contiene P y Q (axioma I1). Si P, Q y R son colineales, sea r la recta que los contiene. Luego r contiene a P y a Q y por tanto, por unicidad, $r = \overleftrightarrow{PQ}$. Luego $R \in \overleftrightarrow{PQ}$.
Recíprocamente, P y Q pertenecen a $\overleftrightarrow{PQ}$ por el axioma I1, y si además R pertenece a $\overleftrightarrow{PQ}$, los tres puntos serán colineales.

1.1.12 Ejercicio.
Supongamos que P, Q y R son puntos distintos. Entonces P, Q y R son colineales si y sólo si $\overleftrightarrow{PQ} = \overleftrightarrow{PR} = \overleftrightarrow{QR}$

Demostración: Si P, Q son puntos distintos, la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ será la única recta que los contenga (axioma I1). De la misma forma, Q y R distintos implica que la recta $\overleftrightarrow{QR}$ será la única recta que contenga a Q y R, y si P y R son distintos la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ será la única recta que contenga a la vez a P y a R.

Entonces, si P, Q y R pasan por una misma recta r, tendremos que $r = \overleftrightarrow{PQ} = \overleftrightarrow{PR} = \overleftrightarrow{QR}$, y recíprocamente, si $r = \overleftrightarrow{PQ} = \overleftrightarrow{PR} = \overleftrightarrow{QR}$, entonces $P, Q, R \in r$.

1.1.13 Ejercicio.
Existen al menos tres rectas no concurrentes.

Demostración: Por el axioma I3, existirán al menos tres puntos diferentes A, B y C no colineales. Puesto que $A \neq B$, el axioma I1 garantiza la existencia de la recta $\overleftrightarrow{AB}$. Y puesto que $C \neq A$ y $C \neq B$, el mismo axioma garantizará la existencia de las rectas $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{BC}$. Estas tres rectas no pueden ser concurrentes. En efecto, supongamos que existe un punto $D \in \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{BC}$. Si $D = A$, entonces $A \in \overleftrightarrow{BC}$ y los tres puntos serían colineales, y llegamos a contradicción. Luego $D \neq A$, y de la misma forma $D \neq B$ y $D \neq C$.
Si $D \neq A$ entonces existirá una única recta $\overleftrightarrow{AD}$ que contiene a D y A, pero $D, A \in \overleftrightarrow{AB}$, luego $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AD}$, y de la misma forma llegamos a $\overleftrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{AD}$, luego $C \in \overleftrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{AD} = \overleftrightarrow{AB}$ y por tanto C, A y B serán colineales, llegando igualmente a contradicción.

1.1.14 Ejercicio.
Para cualquier recta r podemos encontrar siempre un punto $P \notin r$.

Demostración: Sea r una recta. Sabemos que existen tres puntos A, B y C no alineados, (Axioma I3), luego al menos uno de los tres no pertenecerá a r.

1.1.15 Ejercicio.
Para cualquier punto P, existirá al menos una recta r que no pase por P.

Demostración: Por el ejercicio 1.1.13, existen al menos tres rectas no concurrentes, luego P no pertenecerá al menos a una de ellas, pues si perteneciera a las tres serían concurrentes en P.

1.1.16 Ejercicio.
Para cualquier punto P, existen al menos dos rectas diferentes pasando por P.

Demostración: Por el ejercicio anterior, existirá una recta r que no pasa por P. Por el axioma I2, existirán al menos dos puntos diferentes A y B en r, por lo que $r = \overleftrightarrow{AB}$. Tenemos que $P \neq A$, pues P no pertenece a r por hipótesis, y de la misma forma $P \neq B$. Las rectas $\overleftrightarrow{PA}$ y $\overleftrightarrow{PB}$ pasan ambas por P, y son diferentes, pues si $\overleftrightarrow{PA} = \overleftrightarrow{PB}$, entonces $B \in \overleftrightarrow{PA} \Rightarrow P \in \overleftrightarrow{AB} = r$, llegando a contradicción.

1.1.17 Ejercicio.
Supongamos que reemplazamos el axioma I3 por el siguiente axioma:

Axioma I3a: Existe una recta r y un punto $P \notin r$.

Demuestra que de los axiomas I1, I2 y I3a podemos deducir el axioma I3. Recíprocamente, demuestra que de los axiomas I1, I2 y I3 podemos deducir el axioma I3a. Así pues, reemplazando el axioma I3 por el axioma I3a obtenemos un sistema de axiomas equivalente.

Demostración: Por el axioma I3a, existe una recta r y un punto $P \notin r$. Por el axioma I2, existirán dos puntos diferentes A, B en r, luego $r = \overleftrightarrow{AB}$. Los puntos A, B y P satisfacen el axioma I3. Efectivamente, si existe una recta s que pasa por A, B y P, entonces $s = \overleftrightarrow{AB} = r$, luego $P \in r$, contradiciendo la hipótesis.
Recíprocamente, por el axioma I3 existirán tres puntos diferentes A, B y C no colineales. sea $r = \overleftrightarrow{AB}$. Entonces $C \notin r$. Efectivamente, si $C \in r$, entonces los tres puntos serían colineales, contradiciendo la hipótesis.

1.1.18 Ejercicio.
Sea $r = \overleftrightarrow{AB}$ y $C \notin r$. Si $\overleftrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{BC}$ entonces $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{BC}$.

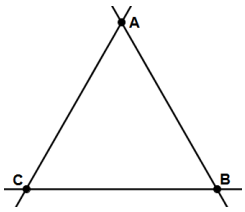
Demostración.
$\overleftrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{BC} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A \in \overleftrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{BC} \\ B \in \overleftrightarrow{BC} = \overleftrightarrow{AC} \end{array} \right\} \Rightarrow r = \overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{BC}$ por el axioma I1.

1.1.19 Definición. Rectas paralelas. (Elementos, Definición 23)
Diremos que dos rectas r y s son paralelas cuando no tengan ningún punto común, es decir, cuando $r \cap s = \varnothing$.

1.2 Planos finitos triviales.

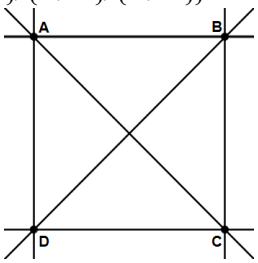
1.2.1 Definición. El plano de tres puntos.

Puntos: Tres letras A, B y C.
Rectas: $\{\{A,B\},\{A,C\},\{B,C\}\}$



1.2.2 Definición. El plano de cuatro puntos.

Puntos: Cuatro letras A, B, C y D.
Rectas: $\{\{A,B\},\{A,C\},\{A,D\},\{B,C\},\{B,D\},\{C,D\}\}$



Estos dos planos así definidos satisfacen los axiomas I1, I2 y I3, y por tanto son planos incidentales.

1.3 El plano de Fano.

1.3.1 Definición. El plano de Fano.
Un plano de Fano es un plano cumpliendo los siguientes axiomas, llamados "Axiomas de Fano":

Axioma F1: Existe al menos una recta.
Axioma F2: Toda recta contiene exactamente tres puntos.
Axioma F3: Para toda recta r existe al menos un punto P tal que $P \notin r$.
Axioma F4: Todo par de puntos diferentes pertenecen a una única recta.
Axioma F5: Todo par de rectas tendrá al menos un punto en común.

1.3.2 Proposición.
Todo plano de Fano es un plano incidental.

Demostración. El axioma I1 es el axioma F4. El axioma F2 implica el axioma I2.
El axioma I3 se cumple aplicando el ejercicio 1.1.17.

1.3.3 Ejercicio.
En un plano de Fano existe al menos un punto.

Demostración. Basta aplicar el axioma F1 y después el axioma F2.

1.3.4 Ejercicio.
Todo par de rectas diferentes se cortan en un único punto.

Demostración. Dadas dos rectas r y s, por el axioma F5 garantizamos que al menos existirá un punto $A \in r \cap s$. Supongamos que también $B \in r \cap s$, con $A \neq B$. Entonces las rectas r y s contienen ambos puntos, y por tanto, aplicando F4, tenemos $r = s$, contradiciendo la hipótesis.

1.3.5 Proposición.
En un plano de Fano existen exactamente siete puntos.

Demostración.
Por el axioma F1 existirá al menos una recta r_1, y por el axioma F2 dicha recta contendrá exactamente tres puntos, digamos A, B y C. Además, por el axioma F3 existirá un punto D tal que $D \notin r_1$. Por lo tanto son cuatro puntos diferentes.
Los puntos A y D pertenecen a una recta r_2 por F4, y aplicando F2 a r_2 existirá tercer punto E. $E \notin r_1$, pues si $E \in r_1$ entonces $r_1 = r_2$ y por tanto $D \in r_1$, contradiciendo la hipótesis.
De la misma forma obtenemos los puntos $F \in BD$ y $G \in CD$.

1.3.6 Proposición.
En un plano de Fano cada punto pertenece a exactamente tres rectas.

Demostración.

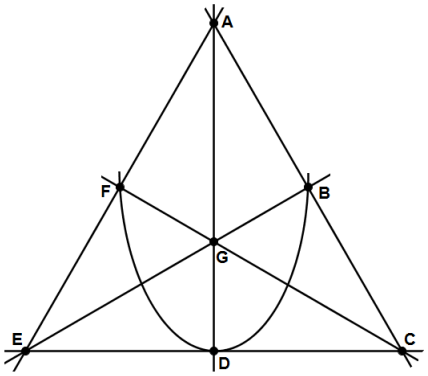
1.3.7 Proposición.
En un plano de Fano no existe ningún punto que pertenezca a todas las rectas a la vez.

Demostración.

1.3.8 Proposición.
En un plano de Fano existen exactamente siete rectas.

Demostración.

1.3.9 Definición. Un modelo para el plano de Fano.
Puntos: Siete letras diferentes A, B, C, D, E y F.
Rectas: Los conjuntos
$\{A,B,C\},\{A,F,E\},\{C,D,E\},\{F,G,C\},\{A,G,D\},\{E,G,B\},\{F,D,B\}$



1.4 Plano de Young.

1.4.1 Definición. Plano de Young.

El Plano de Young se diferencia del Plano de Fano únicamente en el quinto axioma:

Axioma Y1: Existe al menos una recta.
Axioma Y2: Toda recta contiene exactamente tres puntos.
Axioma Y3: Para toda recta r existe al menos un punto P tal que $P \notin r$.
Axioma Y4: Todo par de puntos diferentes pertenecen a una única recta.
Axioma Y5: Para cada recta r y para cada punto P tal que $P \notin r$, existe una única recta s que pasa por P y es paralela a r.

1.4.2 Definición. Un modelo para el plano de Young.

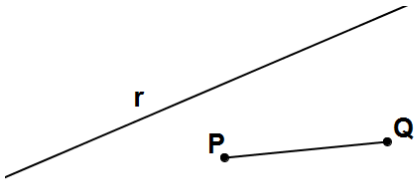
Puntos: Las letras A, B, C, D, E, F, G, H, I, J
Rectas: {A,B,C}, {A, D, G}, {A, E, H}, {A, F, I}, {B, D, H}, {B, E, I}, {B, F, G}, {C, D, I}, {C, E, G}, {C, F, H}, {D, E, F}, {G, H, I}

2 Orden.

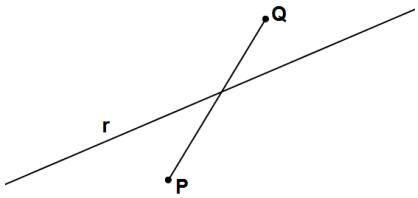
2.1 Los axiomas de orden. Planos ordenados. Segmentos y semirrectas.

2.1.1 Definición. Puntos colaterales.

Sea una recta r y dos puntos P y Q (no necesariamente diferentes) que no pertenecen a r. Diremos que P y Q <u>están al mismo lado de r</u>, y escribiremos $P \approx_r Q$ cuando $\overline{PQ} \cap r = \varnothing$.



En caso contrario diremos que P y Q <u>están en lados opuestos de r</u>, y escribiremos $P \not\approx_r Q$.



2.1.2 Definición. Axiomas de orden. Plano ordenado.

Añadimos a los elementos y axiomas del apartado 1.1 una relación triádica entre los puntos, representada por A*B*C , y diremos que "B está entre A y C". Esta relación cumple los siguientes axiomas:

Axioma B1.

Si A*B*C entonces:

a) C*B*A.
b) Los puntos A, B y C están en una misma recta.
c) A, B y C son puntos diferentes.

Axioma B2. (Elementos, Postulado 2)

Si $A \neq B$, entonces existirán puntos C, D y E tales que $C*A*B$, $A*D*B$ y $A*B*E$.

Axioma B3.

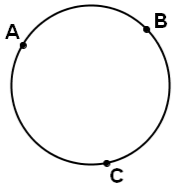
Supongamos que A, B y C son puntos diferentes de una misma recta r. Entonces será cierta una y sólo una de las siguientes afirmaciones:

(a) A*B*C, (b) B*A*C, (c) A*C*B

Es decir, uno y sólo uno de ellos estará entre los otros dos.

Observación.

El axioma B3 implica que las rectas no son circunferencias. Dados tres puntos de una circunferencia, siempre podemos decir que cualquiera de ellos está entre los otros dos.



Axioma B4.
Si r es una recta, y P, Q y R puntos que no pertenecen a r. Entonces:

a) $P \approx_r Q$ y $Q \approx_r R$ entonces $P \approx_r R$, es decir, la relación $P \approx_r Q$ es transitiva.
b) $P \not\approx_r Q$ y $Q \not\approx_r R$ entonces $P \approx_r R$.

Un **plano ordenado** es un plano incidental en el cual además se cumplen los axiomas B1, B2, B3 y B4.

2.1.3 Definición. Segmento.
Sean P y Q dos puntos diferentes. Definimos el segmento de extremos P y Q, que representaremos por $\overline{PQ}$, como el conjunto de puntos

$$\overline{PQ} = \{X \mid P * X * Q\} \cup \{P, Q\}$$

Definimos el interior del segmento $\overline{PQ}$ como el conjunto de puntos

$$\overline{PQ} - \{P, Q\} = \{X \mid P * X * Q\}$$

2.1.4 Definición. Segmento degenerado.
Definimos el segmento degenerado $\overline{PP} = \{P\}$.

2.1.5 Proposición.
Sean dos puntos P y Q. Entonces $\overline{PQ} \subset \overleftrightarrow{PQ}$.

Demostración: Supongamos que $X \in \overline{PQ}$. Entonces se pueden dar tres casos: $X = P$, $X = Q$ o $P * X * Q$.
Si $X = P$ entonces $X \in \overleftrightarrow{PQ}$ por 1.1.3a y de la misma manera si $X = Q$.
Si $P * X * Q$ entonces X, P y Q pertenecen a la misma recta por el axioma B1(b), y la recta ha de ser necesariamente $\overleftrightarrow{PQ}$ por 1.1.3b.

2.1.6 Proposición.
Sean dos puntos P y Q. Entonces $\overline{PQ} = \overline{QP}$.

Demostración: Sea $X \in \overline{PQ}$. $X = P \in \overline{QP} \vee X = Q \in \overline{QP} \vee P * X * Q$
Si $P * X * Q$ entonces también $Q * X * P$, por lo que $X \in \overline{QP}$.

2.1.7 Definición. Semirrecta (o rayo).
Sean dos puntos diferentes P y Q. Definiremos la semirrecta $\overrightarrow{PQ}$ por

$$\overrightarrow{PQ} = \overline{PQ} \cup \{X \mid P * Q * X\}$$

2.1.8 Proposición.
Sean P y Q dos puntos diferentes. Entonces $\overline{PQ} \subset \overrightarrow{PQ}$.

Demostración. Basta aplicar la definición misma de unión de conjuntos.

2.1.9 Proposición.
Sean P y Q dos puntos diferentes. Entonces $\overrightarrow{PQ} \subset \overleftrightarrow{PQ}$.

Demostración. Si $X \in \overrightarrow{PQ} \Rightarrow X \in \overline{PQ} \subset \overleftrightarrow{PQ} \vee P*Q*X$
Si $P*Q*X$ entonces P, Q y X pertenecen a una misma recta por el axioma B1b y esta recta tiene que ser forzosamente $\overleftrightarrow{PQ}$ por 1.1.3b.

2.1.10 Proposición.
Si A*B*C o C*A*B entonces $C \notin \overline{AB}$.

Demostración. Si A*B*C entonces $C \neq A$ y $C \neq B$ por el axioma B1c, y también no se cumple A*C*B por el Axioma B3, luego no se cumplirá ninguna de las condiciones para que $C \in \overline{AB}$. De la misma forma si C*A*B.

2.1.11 Ejercicio.
Demostrar que si $C*A*B$ entonces $C \notin \overrightarrow{AB}$.

Demostración. Supongamos que $C \in \overrightarrow{AB}$. Entonces C=A o C=B o A*C*B o A*B*C. Ninguna de las cuatro posibilidades es compatible con la hipótesis $C*A*B$, por el axioma B3 o por el axioma B1c.

2.1.12 Ejercicio.
Demostrar que si $A \neq B$, entonces $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = \overline{AB}$.

Demostración. Si $P = A \Rightarrow P \in \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} \wedge P \in \overline{AB}$.
De la misma $P = B \Rightarrow P \in \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} \wedge P \in \overline{AB}$.
Si $P \neq A, B$ entonces
$P \in AB \cap BA$
$\Leftrightarrow (A*P*B \vee A*B*P) \wedge (B*P*A \vee B*A*P)$
$\Leftrightarrow A*P*B \vee (A*B*P \wedge B*A*P)$
Pero $A*B*P \wedge B*A*P$ es imposible por el axioma B3, luego
$P \in \overline{AB} \cap \overline{BA} \Leftrightarrow A*P*B \Leftrightarrow P \in \overline{AB}$

2.1.13 Ejercicio.
Demostrar que si $A \neq B$, entonces $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} = \overleftrightarrow{AB}$.

Demostración. Si $P = A \Rightarrow P \in \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} \wedge P \in \overleftrightarrow{AB}$.
De la misma $P = B \Rightarrow P \in \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} \wedge P \in \overleftrightarrow{AB}$.
Si $P \neq A, B$ entonces

$P \in AB \cup BA$

$\Leftrightarrow (A*P*B \vee A*B*P) \vee (B*P*A \vee B*A*P)$

$\Leftrightarrow A*P*B \vee A*B*P \vee B*A*P$

Pero por el axioma B3:

$A*P*B \vee A*B*P \vee B*A*P \Leftrightarrow P \in \overleftrightarrow{AB}$

2.1.14 Definición. Extremos de un segmento.

Los puntos A y B del segmento $\overline{AB}$ se denominan extremos del segmento. El siguiente ejercicio demuestra que los puntos A y B pueden ser determinados exclusivamente mediante la relación de orden en su conjunto de puntos.

2.1.15 Ejercicio.

Los extremos A y B de $\overline{AB}$ son los únicos puntos del segmento que no están entre dos puntos del mismo.

Demostración. Supongamos que $C*A*D$ y $C, D \in \overline{AB}$.

Supongamos en primer lugar que $D \neq B$ y $C \neq B$.

Sabemos que $D \neq A$ y $C \neq B$ por el axioma B1c.

Luego $A*C*B$ y $A*D*B$. Por hipótesis $C*A*D$, luego por 1.4.5, $C*A*D*B$, y por tanto $C*A*B$, pero $A*C*B$, contradiciendo el axioma B3.

Supongamos que $D = B$. Entonces $C*A*B$ con $C \in \overline{AB}$. Ahora $C \neq A$ y $C \neq B$, luego A*C*B. pero esto contradice el axioma B3.

Supongamos que $C = B$. Entonces tenemos $B*A*D$, con $D \in \overline{AB}$. Ahora $D \neq A$ y $D \neq B$, luego A*D*B. pero esto contradice el axioma B3.

2.2 Semiplanos.

2.2.1 Proposición.
La relación $\approx_r$ definida en 2.1.1 es una **relación de equivalencia** en el conjunto de puntos que no pertenecen a r, es decir, cumple las propiedades (a) reflexiva, (b) simétrica y (c) transitiva.

Demostración. Sea una recta r y sean P, Q y R tres puntos que no pertenecen a r.
a) Propiedad reflexiva: $P \approx_r P$.

Por definición $\overline{PP} = \{P\}$, y $\{P\} \cap r = \varnothing$, luego $P \approx_r P$.

b) Propiedad simétrica: $P \approx_r Q \Rightarrow Q \approx_r P$

$P \approx_r Q \Rightarrow \overline{PQ} \cap r \neq \varnothing$, pero $\overline{PQ} = \overline{QP}$, luego $\overline{QP} \cap r \neq \varnothing \Rightarrow Q \approx_r P$

c) Propiedad transitiva: $P \approx_r Q \wedge Q \approx_r R \Rightarrow P \approx_r R$

Es el axioma B4a.

2.2.2 Definición. Semiplano.
Sea P un punto que no pertenece a la recta r. Definiremos el semiplano determinado por P con frontera r por la clase de equivalencia $[P]_r$.

$$[P]_r = \{Q \notin r \mid P \approx_r Q\}$$

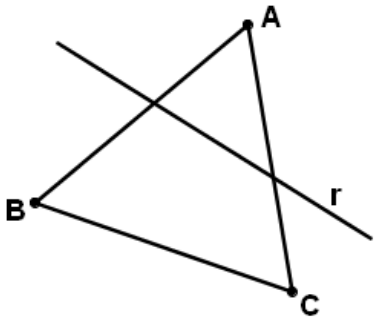
2.2.3 Lema.
Toda recta r determina al menos dos semiplanos.

Demostración. Sea $r = \overleftrightarrow{AB}$. Por 1.1.17 existirá un punto $C \notin r$. Por el axioma B2 existirá un D tal que $D * A * C$.
$D \notin r$, pues si $D \in r$ entonces $r = \overleftrightarrow{AD} = \overleftrightarrow{AC}$ y por tanto $C \in r$, llegando a contradicción.
Claramente $D \not\approx_r C$ pues $A \in \overline{CD} \cap r$.

2.2.4 Proposición.
Toda recta determina exactamente dos semiplanos.

Demostración. En la proposición anterior hemos visto que determina al menos dos semiplanos. Veamos que no puede determinar ninguno más.
Sea $r = \overleftrightarrow{AB}$, y sean C y D en lados opuestos de r: $C \not\approx_r D$.
Supongamos que existe un tercer punto E tal que $E \not\approx_r C$ y $E \not\approx_r D$.
Por el axioma B4(b), $C \not\approx_r D \wedge E \not\approx_r C \Rightarrow D \not\approx_r E$, llegando a una contradicción.

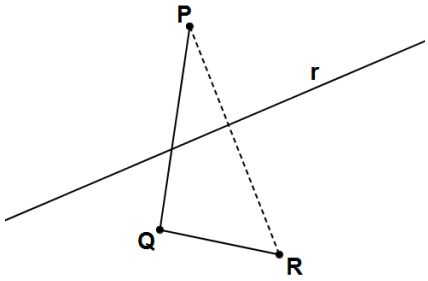
2.2.5 Teorema. Teorema de Pasch.
Sean tres puntos A, B y C, y sea r una recta que pasa por $\overline{AB}$. Entonces
(a) r pasa por $\overline{AC}$ o por $\overline{BC}$.
(b) Si r no contiene ninguno de los puntos A, B o C, entonces pasa exclusivamente por uno de los dos segmentos anteriores. ("**Lema de Bernays**")



Demostración. a) Supongamos que A, B y C no pertenecen a r. La recta r pasa por $\overline{AB}$, luego $A \not\approx_r B$. Entonces o bien $A \approx_r C$ y por tanto r pasa por $\overline{AC}$, o bien $A \not\approx_r C$, por lo que $B \approx_r C$, por el Axioma B4(b) , es decir, r pasa por $\overline{BC}$.
Si $A \in r$, entonces $A \in \overline{AC} \cap r$, Si $B \in r$, entonces $B \in \overline{BC} \cap r$, y si $C \in r$, entonces $C \in \overline{AC} \cap r$.
b) Supongamos que A, B y C no pertenecen a r. Si r pasa por $\overline{AC}$ entonces $A \approx_r C$, y si pasa por $\overline{BC}$ entonces $B \approx_r C$, luego por el Axioma B4(a) tenemos que $A \approx_r B$, lo cual es absurdo porque la recta r pasa por $\overline{AB}$ por hipótesis.

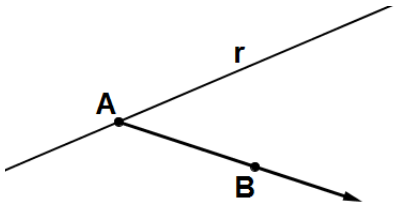
Observación: Euclides utilizó este teorema sin demostrarlo.

2.2.6 Ejercicio.
Sean P, Q y R tres puntos que no pertenecen a una recta r. Si $P \not\approx_r Q$ y $Q \approx_r R$, entonces $P \not\approx_r R$.



Demostración. Si $P \approx_r R$, entonces puesto que $Q \approx_r R$, por el axioma B4(a) se deduce $P \approx_r Q$, contradiciendo la hipótesis $P \not\approx_r Q$.

2.2.7 Ejercicio.
Sean una recta r, $A \in r$ y $B \notin r$. Todo punto de la semirrecta $\overrightarrow{AB}$, excepto A, pertenece a $[B]_r$, es decir, es colateral con B respecto a r.



Demostración. En primer lugar observamos que el único punto de corte entre r y $\overleftrightarrow{AD}$ es A, pues son rectas diferentes.

$P \in \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow A*P*B \vee A*B*P \vee P = A \vee P = B$

El caso $P = A$ queda descartado, y el caso $P = B$ es trivial. Vamos los dos casos restantes.

Supongamos A*P*B o A*B*P. Si $X \in \overline{PB} \cap r \Rightarrow X = A$, pues $\overline{PB} \subset \overleftrightarrow{AD}$. Luego tendríamos P*A*B, contradiciendo la hipótesis (Axioma B3). Luego $\overline{PB} \cap r = \varnothing$, es decir, $P \in [B]_r$.

2.3 Relación de orden entre cuatro puntos.

2.3.1 Definición. Relación de orden entre cuatro puntos. (Definition 13).
Sean cuatro puntos A, B, C, D . Diremos que A*B*C*D cuando se cumplan las siguientes cuatro condiciones: A*B*C, A*B*D, A*C*D y B*C*D al mismo tiempo.

Con otras palabras, los cuatro puntos estarán ordenados cuando, descartando cualquiera de los cuatro, los otros tres mantienen el orden.

2.3.2. Proposición.
Si A*B*C*D entonces A, B, C y D son diferentes y colineales.

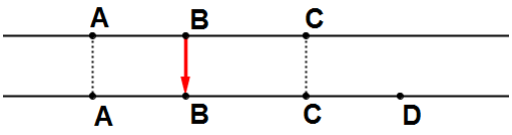
Demostración. Puesto que se cumple A*B*C, los puntos A, B y C son diferentes y colineales (Axioma B1). Sea r la recta que pasa por los tres. Claramente $r = \overleftrightarrow{AB}$.
Puesto que A*B*D, los tres puntos A, B y D son diferentes y $D \in \overleftrightarrow{AB}$, luego los cuatro puntos son colineales.
Por último, A*C*D implica que los puntos A, C y D son diferentes, por lo tanto los cuatro puntos son diferentes.

2.3.3 Proposición.
Si A*B*C*D entonces D*C*B*A.

Demostración. Aplicamos el axioma B1(a) para cada condición:

$$A*B*C*D \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} B*C*D \Rightarrow D*C*B \\ A*C*D \Rightarrow D*C*A \\ A*B*D \Rightarrow D*B*A \\ A*B*C \Rightarrow C*B*A \end{array}\right\} \Leftrightarrow D*C*B*A$$

2.3.4 Proposición. "Squeezing, versión 1".
Si A*C*D y A*B*C entonces A*B*C*D



Demostración. $A*B*C*D \Leftrightarrow B*C*D \wedge A*C*D \wedge A*B*D \wedge A*B*C$
Tenemos que comprobar B*C*D y A*B*D.
$A*C*D \Rightarrow A,C,D \in \overleftrightarrow{AC}$, y de la misma forma $A*B*C \Rightarrow A,B,C \in \overleftrightarrow{AC}$, luego $A,B,C,D \in \overleftrightarrow{AC}$. Definimos $r = \overleftrightarrow{AC}$.
Sea E un punto $E \notin \overleftrightarrow{AC}$ (1.1.17).
Las rectas $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{CE}$ se cortan única y exclusivamente en el punto C, pues son diferentes (1.1.8)

$A*B*C \Rightarrow C \notin \overline{AB}$, luego $\overline{AB} \cap r = \varnothing$, y por lo tanto $A \approx_r B$

$A*C*D \Rightarrow A \not\approx_r D$

Aplicando 1.2.17 tenemos que $B \not\approx_r D$, luego $\overline{BD} \cap r \neq \varnothing$. Pero $\overline{BD} \subset \overleftrightarrow{AC}$, luego forzosamente $\overline{BD} \cap r = C$, es decir B*C*D.
De la misma forma se demuestra la condición A*B*D.

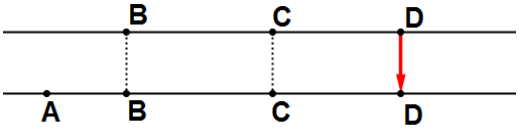
2.3.5 Proposición. "Squeezing, versión 2".
Si A*B*D y B*C*D entonces A*B*C*D.

Demostración.

$$\left.\begin{array}{l} A*B*D \Rightarrow D*B*A \\ B*C*D \Rightarrow D*C*B \end{array}\right\} \Rightarrow D*C*B*A \Rightarrow A*B*C*D$$

Donde hemos utilizado B1a , 2.3.4 y 2.3.3.

2.3.6 Proposición. "Overlap".
Si $A*B*C$ y $B*C*D$, entonces $A*B*C*D$.



Demostración. $A*B*C$ y $B*C*D$ implica que los cuatro puntos son diferentes y colineales. Sea r la recta que contiene a los cuatro puntos.
Desarrollando la definición de $A*B*C*D$, sólo tenemos que demostrar dos implicaciones:
i) $A*B*C \wedge B*C*D \Rightarrow A*C*D$
Hay tres posibilidades: $D*A*C$, $A*D*C$ y $D*C*A$. Veamos que las dos primeras nos llevan a contradicción.
Supongamos $D*A*C$. Por 1.4.5, $D*A*C \wedge A*B*C \Rightarrow D*A*B*C \Rightarrow D*B*C$, incompatible con $B*C*D$.
Supongamos $A*D*C$. Seguiremos un razonamiento similar al de 1.4.4:
Sea $E \notin \overleftrightarrow{AD}$ y $s = \overleftrightarrow{ED}$. El único punto de intersección entre r y s es D.

$$\left.\begin{array}{l} A*D*C \Rightarrow A \not\approx_s C \\ B*C*D \Rightarrow B \approx_s C \end{array}\right\} \Rightarrow A \not\approx_s B \Rightarrow A*D*B$$

Ahora $A*D*B \wedge A*B*C \Rightarrow A*D*B*C \Rightarrow D*B*C$ que es incompatible con $B*C*D$.
Luego la única posibilidad es $A*C*D$.
ii) $A*B*C \wedge B*C*D \Rightarrow A*B*D$. Hay tres posibilidades: $A*D*B$, $B*A*D$ y $A*B*D$. Veamos que las dos primeras nos llevan a contradicción.
Supongamos $A*D*B$. Entonces $A*D*B \wedge A*B*C \Rightarrow A*D*B*C \Rightarrow D*B*C$, incompatible con $B*C*D$.
Supongamos $A*D*B$. Entonces $A*D*B \wedge A*B*C \Rightarrow A*D*B*C \Rightarrow D*B*C$, incompatible con $B*C*D$.

2.3.7 Proposición.
Si $A*B*C$, $A*B'*C$ y $B \neq B'$ entonces $A*B*B'*C$ o $A*B'*B*C$.

Demostración. A, B y B' son diferentes y colineales, luego se tiene que dar uno de los tres casos siguientes: i) $A*B*B'$, ii) $A*B'*B$ o iii) $B*A*B'$.
i) $A*B*B' \wedge A*B'*C \Rightarrow A*B*B'*C$.
ii) $A*B'*B \wedge A*B*C \Rightarrow A*B'*B*C$
iii) $B*A*B' \wedge A*B'*C \Rightarrow B*A*B'*C \Rightarrow B*A*C$ absurdo, pues suponemos $A*B*C$.

2.3.8 Proposición.
Si $A*B*C$, $A*B*C'$ y $C \neq C'$ entonces $A*B*C*C'$ o $A*B*C'*C$.

Demostración. A, C y C' son tres puntos diferentes y colineales, luego se tiene que dar uno de los tres casos siguientes: i) $A*C*C'$, ii) $A*C'*C$ o iii) $C*A*C'$.
i) $A*C*C' \wedge A*B*C \Rightarrow A*B*C*C'$
ii) $A*C'*C \wedge A*B*C' \Rightarrow A*B*C'*C$
iii) $C*A*C' \wedge A*B*C' \Rightarrow C*A*B*C' \Rightarrow C*A*B$ absurdo, pues suponemos $A*B*C$.

2.3.9 Proposición.
Si A, B, C y D son cuatro puntos diferentes y colineales, y se cumple $A*B*C$.
Entonces se cumple una y sólo una de las siguientes afirmaciones:

i) $D*A*B*C$ ii) $A*D*B*C$ iii) $A*B*D*C$ iv) $A*B*C*D$

Demostración. Si A,B,D son distintos y colineales entonces se da una situación: A*B*D, A*D*B o D*A*B. Por otro lado, A, C, D son distintos y colineales, luego se da una de las situaciones siguientes: A*C*D, C*A*D, o C*D*A. Aplicamos las proposiciones anteriores para estudiar caso por caso:

	A*B*D	A*D*B	D*A*B
A*C*D	A*B*C*D (iv) o A*C*B*D imposible	A*C*D*B imposible	D*C*A*B imposible
C*A*D	C*A*B*D imposible	C*A*D*B imposible	B*D*A*C imposible o D*B*A*C (i)
C*D*A	A*B*D*C (iii)	A*D*B*C (ii) o A*D*C*B imposible	C*D*A*B imposible

2.3.10 Corolario.
Si A, B, C y D son cuatro puntos diferentes y colineales, entonces existe una permutación X, Y, Z, W de estos cuatro puntos tal que X*Y*Z*W.

Demostración. Los puntos A, B y C son diferentes, luego i) $A*B*C$, ii) $A*C*B$ o iii) $B*A*C$. Basta construir las tres tablas anteriores con cada caso para obtener los 24 casos posibles.

2.3.11 Teorema.
Si $B*A*C$ entonces $\overline{BA} \subset \overline{BC}$.

Demostración. $P \in \overline{BA} \Rightarrow B*P*A$.
$B*P*A \wedge B*A*C \Rightarrow B*P*A*C \Rightarrow B*P*C \Rightarrow P \in \overline{BC}$.

Si $P = A$ o $P = C$ es trivial.

2.3.12 Ejercicio.
Supongamos que $B * A * C$. Entonces $\overline{BA} \cup \overline{AC} = \overline{BC}$, y $\overline{BA} \cap \overline{AC} = \{A\}$.

Demostración.
$$B * A * C \Rightarrow \left.\begin{cases} \overline{BA} \subset \overline{BC} \\ C * A * B \Rightarrow \overline{AC} \subset \overline{BC} \end{cases}\right\} \Rightarrow \overline{BA} \cap \overline{AC} \subset \overline{BC}.$$
Está claro que $\{A\} \subset \overline{BA} \cap \overline{AC}$. Veamos $\overline{BA} \cap \overline{AC} \subset \{A\}$. Sea $P \in \overline{BA} \cap \overline{AC}$
Si $P = B \Rightarrow A * B * C$, incompatible con $B * A * C$.
Si $P = A \Rightarrow A \in \{A\}$.
Si $P = C \Rightarrow B * C * A$, incompatible con $B * A * C$.
Si $B * P * A \wedge A * P * C$: $A * P * C \wedge B * A * C \Rightarrow A * B * P * C \Rightarrow A * B * C$, incompatible con $B * A * C$.

2.3.13. Proposición.
Si C*A*B entonces $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{AC} = \{A\}$.

Demostración.
$$\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{AC} = (\overline{AB} \cap \{P \mid A * B * P\}) \cup (\overline{AC} \cap \{P \mid A * C * P\}) =$$
$$= (\overline{AB} \cap \overline{AC}) \cup \left(\overline{AB} \cap \{P \mid A * B * P\}\right) \cup$$
$$\cup (\{P \mid A * B * P\} \cap \overline{AC}) \cup \left(\{P \mid A * B * P\} \cap \{P \mid A * C * P\}\right) =$$
$$= \{A\}$$
$\overline{AB} \cap \overline{AC} = \{A\}$ por 2.3.12.
$\overline{AB} \cap \{P \mid A * B * P\} = \varnothing$ pues A*P*B y A*B*P son incompatibles.
$\{P \mid A * B * P\} \cap \overline{AC} = \varnothing$ pues $A * P * C \wedge C * P * A * B \Rightarrow P * A * B$ incompatible con A*P*C.
$\{P \mid A * B * P\} \cap \{P \mid A * C * P\} = \varnothing$, pues
$A * B * P \wedge C * A * B \Rightarrow C * A * B * P \Rightarrow C * A * P$, incompatible con $A * C * P$.

2.3.14 Definición. Semirrectas opuestas por el vértice.
Si A*B*C, diremos que $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{BA}$ son semirrectas opuestas.

2.3.15 Proposición.
Si A*B*C, entonces $\overleftrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} \cup \overrightarrow{BA}$

Demostración. Veamos que $\overleftrightarrow{AC} \subset \overrightarrow{BC} \cup \overrightarrow{BA}$:
Aplicando B3, $P \in \overleftrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} P = A \vee P = B \\ P * A * C \vee A * P * C \vee A * C * P \end{cases}$
Si $P = A \vee P = B \Rightarrow P \in \overrightarrow{BA} \subset \overrightarrow{BC} \cup \overrightarrow{BA}$
Si $P * A * C$, entonces puesto que $A * B * C$ tenemos $P * A * B * C$ (1.4.4), luego $P * A * B$, por tanto $B * A * P$ y en consecuencia $P \in \overrightarrow{BA} \subset \overrightarrow{BC} \cup \overrightarrow{BA}$

De la misma manera
$A*C*P \wedge A*B*C \Rightarrow A*B*C*P \Rightarrow B*C*P \Rightarrow P \in \overrightarrow{BC} \subset \overrightarrow{BC} \cup \overrightarrow{BA}$
Por último, si $A*P*C \wedge A*B*C \Rightarrow A*P*B*C \vee A*B*P*C$
$A*P*B*C \Rightarrow A*P*B \Rightarrow P \in \overline{AB} \subset \overrightarrow{BA} \subset \overrightarrow{BC} \cup \overrightarrow{BA}$
$A*B*P*C \Rightarrow B*P*C \Rightarrow P \in \overline{BC} \subset \overrightarrow{BC} \subset \overrightarrow{BC} \cup \overrightarrow{BA}$
Veamos que $\overrightarrow{BC} \cup \overrightarrow{BA} \subset \overleftrightarrow{AC}$:
$A*B*C \Rightarrow A,B,C \in \overleftrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{BC} \subset \overleftrightarrow{BC} = \overleftrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BA} \subset \overleftrightarrow{BA} = \overleftrightarrow{AB}$, luego $\overrightarrow{BC} \cup \overrightarrow{BA} \subset \overleftrightarrow{AC}$.

2.3.16 Ejercicio.
Supongamos que A*B*C. Entonces $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

Demostración. Veamos en primer lugar $\overrightarrow{AB} \subset \overrightarrow{AC}$. Si $P \in \overrightarrow{AB}$ entonces
i) $P = A \Rightarrow P \in \overrightarrow{AC}$
ii) $P = B \Rightarrow A*P*C \Rightarrow P \in \overrightarrow{AC}$
iii) $A*P*B$. Puesto que por hipótesis $A*B*C$, tenemos $A*P*B*C$, y por tanto $A*B*C$. Luego $P \in \overrightarrow{AC}$
iv) $A*B*P$. Puesto que por hipótesis $A*B*C$, sólo puede suceder $A*B*P*C$, y por tanto $B*P*C$ y $P \in \overrightarrow{AC}$, o bien $A*B*C*P$ y por tanto $B*C*P$ y $P \in \overrightarrow{AC}$.

Veamos ahora $\overrightarrow{AC} \subset \overrightarrow{AB}$. Si $P \in \overrightarrow{AC}$ entonces:
i) $P = A \Rightarrow P \in \overrightarrow{AB}$
ii) $P = C \Rightarrow A*B*P \Rightarrow P \in \overrightarrow{AB}$
iii) $A*P*C$. Puesto que por hipótesis $A*B*C$, tenemos o bien $A*P*B*C$, y por tanto $A*P*B$. Luego $P \in \overrightarrow{AB}$, o bien $A*B*P*C$, y por tanto $A*B*P$. Luego $P \in \overrightarrow{AB}$,
iv) $A*C*P$. Puesto que por hipótesis $A*B*C$, deducimos que $A*B*C*P$, y por tanto $A*B*P$.

2.3.17 Ejercicio.
Supongamos que $P \in \overrightarrow{AB}$, y $P \neq A$. Entonces $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP}$, y $B \in \overrightarrow{AP}$.

Demostración. Si $P = B$ trivialmente $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP}$.
Si $A*P*B$ entonces por el ejercicio anterior, 2.3.16, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB}$.
Si $A*B*P$, igualmente por 1.4.14 deducimos que $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB}$.
Ahora es trivial que $B \in \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP}$.

2.3.18 Ejercicio.
Toda recta contiene infinitos puntos.

Demostración. Sea una recta r. $r = \overleftrightarrow{A_1A_2}$ con $A_1 \neq A_2$ por 1.1.4.
Por el axioma B2, existirá un A_3 tal que $A_1*A_2*A_3$. $A_3 \in r$ por el axioma B1b, y $A_3 \neq A_2$ y $A_3 \neq A_1$ por el axioma B1(c).

De la misma forma, podemos ir añadiendo puntos $A_k \in r$ tales que $A_{k-2} * A_{k-1} * A_k$, $A_k \neq A_{k-1}$ y $A_k \neq A_{k-2}$.
Tenemos una sucesión de puntos $\{A_1, A_2, ..., A_k\}$ tales que $A_{k-2} * A_{k-1} * A_k$.
Veamos que se cumple $A_1 * A_{k-1} * A_k$ para todo k, por inducción:
Es cierto para k=3: $A_1 * A_2 * A_3$, y si suponemos que es cierto hasta k-1: $A_1 * A_{k-2} * A_{k-1}$, entonces, puesto que $A_{k-2} * A_{k-1} * A_k$, tenemos que $A_1 * A_{k-2} * A_{k-1} * A_k$, luego $A_1 * A_{k-1} * A_k$, como queríamos ver.
Veamos ahora que es una sucesión de segmentos encajados: $\overline{A_1A_2} \subset ... \subset \overline{A_1A_k}$, nuevamente por inducción: $\overline{A_1A_2} \subset \overline{A_1A_3}$ pues $A_1 * A_2 * A_3$ (Teorema 2.3.11).
Supongamos ahora que es cierto hasta k-1: $\overline{A_1A_2} \subset \overline{A_1A_3} \subset \overline{A_1A_4} ... \subset \overline{A_1A_{k-1}}$. Puesto que $A_1 * A_{k-2} * A_{k-1}$, y $A_{k-2} * A_{k-1} * A_k$ tenemos que $A_1 * A_{k-2} * A_{k-1} * A_k$, y por tanto $A_1 * A_{k-1} * A_k$, luego por 1.4.9 deducimos que $\overline{A_1A_{k-1}} \subset \overline{A_1A_k}$.
Veamos, por último, que $A_k \notin \overline{A_1A_j}$ para todo j<k. Puesto que son segmentos encajados, es suficiente ver $A_k \notin \overline{A_1A_{k-1}}$. Supongamos que $A_k \in \overline{A_1A_{k-1}}$. Puesto que hemos demostrado $A_1 * A_{k-1} * A_k$, los tres puntos son diferentes, luego $A_1 * A_k * A_{k-1}$, pero esto contradice el axioma B3.
Así pues, la cadena de segmentos encajados es estricta: $\overline{A_1A_{k-1}} \subset \overline{A_1A_k}$ y $\overline{A_1A_{k-1}} \neq \overline{A_1A_k}$.
Veamos que son todos diferentes: $A_k \neq A_j$ para todo $k \neq j$.
Si $A_k = A_j$ para $j < k$, entonces $\overline{A_1A_k} = \overline{A_1A_j}$, contradiciendo el hecho demostrado anteriormente de que los intervalos están encajados de forma estricta: $\overline{A_1A_k} \neq \overline{A_1A_j}$.
Así pues, la sucesión de puntos $\{A_1, A_2, ..., A_k\}$ son todos diferentes.

2.3.19 Ejercicio.
Todo segmento contiene infinitos puntos.

Demostración. Dado un segmento $\overline{AB}$, existirá un B_1 tal que $A * B_1 * B$, por el axioma B2. De la misma forma podemos obtener un B_2 tal que $A * B_2 * B_1$, un B_3 tal que $A * B_3 * B_2$, etc. Es fácil demostrar que la sucesión $\{B_1, B_2, ...\}$ se compone de infinitos puntos diferentes del segmento $\overline{AB}$.

2.3.20 Definición. Extremo de una semirrecta.
Llamaremos extremo de la semirrecta $\overrightarrow{AB}$ al punto A. El siguiente lema nos garantiza que el extremo de una semirrecta queda determinado en el conjunto de puntos de la misma por la relación de orden, y por lo tanto es único. Así pues, el extremo de una semirrecta está bien definido, pues no depende de la pareja de puntos que tomemos para su definición.

2.3.21 Lema.
El punto A de la semirrecta $\overrightarrow{AB}$ es el único punto de la semirrecta que no está entre otros dos puntos cualesquiera de la misma.

Demostración. Claramente $A \in \overline{AB} \subset \overrightarrow{AB}$ por 2.1.8.
Supongamos que existen $C, D \in \overrightarrow{AB}$ tales que $C * A * D$, es decir, A está entre otros dos puntos de la semirrecta. Luego $A \neq D$ por el axioma 1.2.1(c), y por 1.4.16 tenemos que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$. Pero ahora, por 2.1.10, deducimos que $C \notin \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}$, contradiciendo la hipótesis.
Veamos que el resto de puntos de la semirrecta están entre dos puntos de la misma.
Sea $C \in \overrightarrow{AB}$, $C \neq A$. Nuevamente por 2.3.17 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$, y por el Axioma B2, existirá un D tal que A*C*D. El punto $D \in \overrightarrow{AC}$ claramente, luego $D \in \overrightarrow{AB}$, y por tanto C está entre dos puntos de la semirrecta.

2.3.22 Corolario.
Si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son iguales como conjuntos, entonces A=C.

Demostración. A es el único punto del conjunto $\overrightarrow{AB}$ que no está entre otros dos puntos del mismo. Y por otro lado, C es el único punto del conjunto $\overrightarrow{CD}$ que no está entre otros dos puntos del mismo. Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, entonces A=C por unicidad.

2.3.23 Ejercicio.
Si $A * B * C$, $D \in \overrightarrow{BC}$ y $D \neq B$ entonces A*B*D.

Demostración.

Si $D \in \overrightarrow{BC}$ tendremos una de las siguientes situaciones:
i) $B * C * D \Rightarrow A * B * C * D \Rightarrow A * B * D$
ii) $B * D * C \Rightarrow A * B * D * C \Rightarrow A * B * D$
ii) D=C, y por tanto A*B*D
ii) D=B no sucede por hipótesis.

2.3.24 Ejercicio.
Si $A * B * C$, $D \in \overrightarrow{BC}$ y $D \neq B$ entonces A*B*D.

Demostración.
Sea $D \in \overrightarrow{BC} \wedge D \neq B$. Si $D = C$ es trivial. Si $B * D * C \Rightarrow A * B * D * C \Rightarrow A * B * D$.
Si $B * C * D \Rightarrow A * B * C * D \Rightarrow A * B * D$.

2.3.25 Definición. Semirrecta opuesta.
Dada una semirrecta $\overrightarrow{AB}$, definimos su semirrecta opuesta $op(\overrightarrow{AB})$ como

$$op(\overrightarrow{AB}) = \{P \mid P * A * B\} \cup \{A\}$$

2.3.26 Proposición.

$$op(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC} \text{ para cualquier punto } C * A * B.$$

Demostración.
Sea C cualquier punto $C * A * B$.

Veamos en primer lugar $op(\overrightarrow{AB}) \subset \overrightarrow{AC}$.

Sea $P \in (\overrightarrow{AB})$.

Si $P = A$ entonces claramente $P = A \in \overrightarrow{AC}$, y de la misma forma, si $P = C$ entonces $P = C \in \overrightarrow{AC}$.

Supongamos que $P \neq A, C$, es decir, $P * A * B$.

$P * A * B$ y $C * A * B$ implica $P * C * A * B$ o $C * P * A * B$ (2.3.7)

Si $P * C * A * B$ entonces $P * C * A$ y por tanto $P \in \overrightarrow{AC}$.

Si $C * P * A * B$ entonces $C * P * A$ y por tanto $P \in \overrightarrow{AC}$.

En todo caso, $P \in \overrightarrow{AC}$.

Veamos ahora que $\overrightarrow{AC} \subset op(\overrightarrow{AB})$.

Sea $P \in \overrightarrow{AC}$. Se pueden dar los siguientes casos:

a) $P = A$. Entonces $P \in op(\overrightarrow{AB})$ por construcción de $op(\overrightarrow{AB})$.

b) $P = C$. Luego $C * A * B \Rightarrow P * A * B$ y por tanto $P \in op(\overrightarrow{AB})$.

c) $A * P * C$. Entonces

$C * A * B \Rightarrow B * A * C \Rightarrow B * A * P * C \Rightarrow B * A * P \Rightarrow P * A * B \Rightarrow P \in op(\overrightarrow{AB})$

d) $A * C * P$. De la misma manera,

$C * A * B \Rightarrow B * A * C \Rightarrow B * A * C * P \Rightarrow B * A * P \Rightarrow P * A * B \Rightarrow P \in op(\overrightarrow{AB})$

2.3.27 Ejercicio.

a) $\overrightarrow{AB} \cap op(\overrightarrow{AB}) = \{A\}$

b) $\overrightarrow{AB} \cup op(\overrightarrow{AB}) = \overleftrightarrow{AB}$

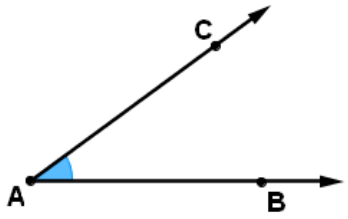
Demostración.

2.4 Ángulos.

2.4.1 Definición. Ángulo.

Un ángulo son dos semirrectas no alineadas con el extremo en común.
Sean tres puntos A, B y C no alineados. Definiremos el ángulo $\angle BAC$ por

$$\angle BAC = \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC}$$



Observación: La exigencia de que A, B y C no estén alineados excluye de la definición de ángulo aquellas construcciones que, medidas con el transportador de ángulos, tendrían asociadas amplitudes de 0º o 180º.

2.4.2 Proposición.

Sean A, B, C tres puntos no colineales. Si $B' \in \overrightarrow{AB}$ y $C' \in \overrightarrow{AC}$, con $B' \neq A$ y $C' \neq A$, entonces A, B' y C' son también no colineales y $\angle BAC = \angle B'AC'$.

Demostración. Supongamos que existe una recta r tal que $A, B', C' \in r$.
$B' \in \overrightarrow{AB} \subset \overleftrightarrow{AB}$ y por lo tanto $\overleftrightarrow{AB} = r$ (Axioma I1)
De la misma forma llegamos a $\overleftrightarrow{AC} = r$, luego $A, B, C \in r$, absurdo.
Por lo tanto $B' \in \overrightarrow{AB}$ y $B' \neq A$ entonces $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB'}$ (2.3.17), y de la misma manera $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC'}$, luego $\angle BAC = \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB'} \cup \overrightarrow{AC'} = \angle B'AC'$

2.4.3 Definición. Vértice de un ángulo.

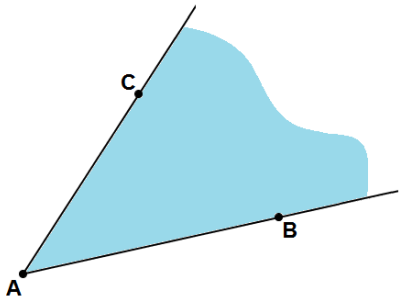
Diremos vértice del ángulo $\angle BAC$ al punto A.
Por 2.3.21, el vértice de un ángulo es el único punto del ángulo que no está entre dos puntos del mismo.

2.4.4 Definición. Lados de un ángulo.

Diremos lados del ángulo $\angle BAC$ a las semirrectas $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

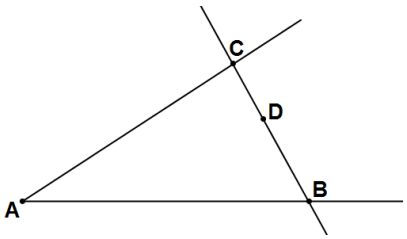
Observación: Los lados de un ángulo son independientes de los puntos B y C escogidos para definirlo.

2.4.5 Definición. Interior y exterior de un ángulo.
Sean A, B y C tres puntos no colineales. Definimos el interior del ángulo $\angle BAC$ por $[B]_{\overline{AC}} \cap [C]_{\overline{AB}}$, es decir los puntos que son colaterales con B respecto $\overleftrightarrow{AC}$ y colaterales con C respecto a $\overleftrightarrow{AB}$.



Se define el exterior del ángulo $\angle BAC$ por el conjunto de todos los puntos que no están en su interior.

2.4.6 Proposición. (CrossBar Betweenness).
Supongamos que A, B y C son tres puntos no colineales, y sea $D \in \overleftrightarrow{BC}$. Entonces D pertenece al interior de $\angle BAC$ si y sólo si B*D*C.



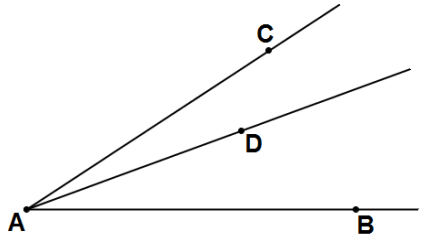
Demostración. Supongamos que D pertenece al interior de $\angle BAC$. Entonces $D \approx_{\overline{AC}} B$ y $D \approx_{\overline{AB}} C$.

En particular $D \notin \overleftrightarrow{AC}$ y $D \notin \overleftrightarrow{AB}$, por lo tanto $D \neq C$ y $D \neq B$.
Por el Axioma B3 sólo se puede dar una de las siguientes tres situaciones:
i) D*B*C, ii) B*D*C o iii) B*C*D.
Veremos que se cumple la segunda viendo que las otras dos nos llevan a absurdo.
Supongamos que i) D*B*C. Entonces $B \in \overline{DC} \cap \overleftrightarrow{AB} \Rightarrow D \not\approx_{\overline{AB}} C$, contradiciendo la hipótesis.
De la misma forma vemos que iii) B*C*D nos lleva al absurdo. Así pues se cumple B*D*C.
Supongamos por el contrario que B*D*C. Entonces $B \notin \overline{DC}$ por (1.2.13). Pero B es el único punto de intersección posible entre $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{BC}$ (por 1.1.11), luego $\overline{DC} \cap \overleftrightarrow{AB} = \varnothing$, es decir $D \approx_{\overline{AB}} C$. De la misma forma vemos que $D \approx_{\overline{AC}} B$.

2.5 Ordenación de semirrectas con extremo común.

2.5.1 Proposición.

Sea un ángulo $\angle BAC$ y D un punto de su interior. Entonces todos los puntos de $\overrightarrow{AD}$, exceptuando A, pertenecen también al interior de $\angle BAC$.



Demostración. $P \in \overrightarrow{AD} - \{A\} \Rightarrow P \in [D]_{\overrightarrow{AB}}$ por 2.3.7.
Pero $C \in [D]_{\overrightarrow{AB}} \Rightarrow [D]_{\overrightarrow{AB}} = [C]_{\overrightarrow{AB}}$ (una propiedad fundamental de las clases de equivalencia)
Luego $P \in [C]_{\overrightarrow{AB}}$. De la misma forma se comprueba que $P \in [B]_{\overrightarrow{AC}}$, es decir, P pertenece al interior de $\angle BAC$.

2.5.2 Definición. Ordenación de semirrectas con extremo común.

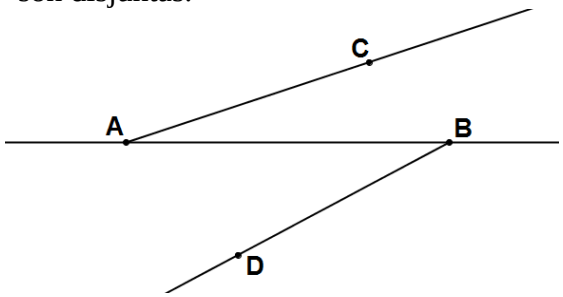
Sean cuatro puntos diferentes A, B, C y D, tales que las semirrectas $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ son diferentes, y tales que los puntos A, B y C no son colineales. (es decir, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ no son semirrectas opuestas. Si D está en el interior de $\angle BAC$ entonces diremos que $\overrightarrow{AD}$ está entre $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, y escribiremos $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$.
Observación: Por construcción está claro que $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$ es equivalente a $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$.

Observación 2: La Proposition 1.5.2 garantiza que el ángulo $\angle BAC$ depende de las semirrectas $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, y no de la elección de los puntos $B \in \overrightarrow{AB}$ y $C \in \overrightarrow{AC}$ escogidos. Por otro lado, la proposición 1.6.1 garantiza que si $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$, todo punto de la semirrecta $\overrightarrow{AD}$, excepto A, pertenece al interior de $\angle BAC$. Todo esto garantiza que la definición del orden entre semirrectas con extremo común está bien definido, es decir, es independiente de la elección de los puntos B, C y D de cada semirrecta.

2.6 El teorema Crossbar y aplicaciones.

2.6.1 Lema.

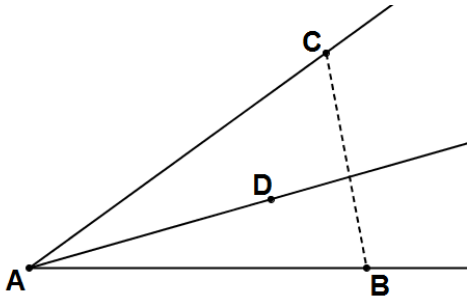
Si C y D son dos puntos en lados opuestos de una recta $r = \overleftrightarrow{AB}$, $A \neq B$, entonces las semirrectas $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BD}$ son disjuntas.



Demostración. Por la proposición 2.2.7, todo punto de la semirrecta $\overrightarrow{AC}$, exceptuando el extremo A, es colateral con C respecto a r. De la misma forma todo punto de la semirrecta $\overrightarrow{BD}$, exceptuando el extremo B, será colateral con D respecto a r. Pero C y D están en lados opuestos, luego A y B serían los únicos puntos que pueden ser colaterales respecto r, pero $A \neq B$.

2.6.2 Lema. Propiedad de separación.

Si $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$ entonces $B \not\approx_{\overline{AD}} C$.



Demostración. Si $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$ entonces D está en el interior de $\angle BAD$, luego $D \approx_{\overline{AC}} B$ y $D \approx_{\overline{AB}} C$.

Sea E un punto tal que E*A*C. Entonces $E \not\approx_{\overline{AB}} C$, y puesto que $D \approx_{\overline{AB}} C$, tenemos que $E \not\approx_{\overline{AB}} D$ (1.2.17). Luego $\overrightarrow{AD} \cap \overrightarrow{BE} = \varnothing$ (1.7.1), luego en particular $\overrightarrow{AD} \cap \overline{BE} = \varnothing$.

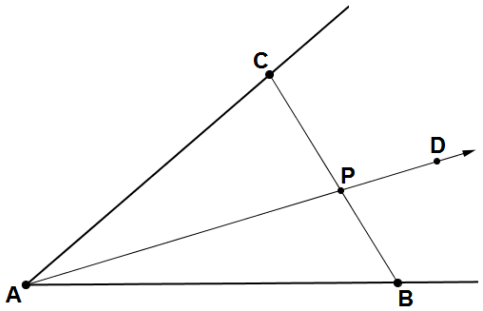
Sea F un punto tal que F*A*D. Entonces $F \not\approx_{\overline{AC}} D$, y puesto que $D \approx_{\overline{AC}} B$, tenemos que $F \not\approx_{\overline{AC}} B$. Luego $\overrightarrow{AF} \cap \overrightarrow{BE} = \varnothing$ (1.2.17), y en particular $\overrightarrow{AF} \cap \overline{BE} = \varnothing$

Pero $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AF} \cup \overrightarrow{AD}$ (1.4.13), luego $\overrightarrow{AD} \cap \overline{BE} = \varnothing$, es decir, $B \approx_{\overline{AD}} E$. Teniendo en cuenta que $C * A * E \Rightarrow C \not\approx_{\overline{AD}} E$, llegamos a $B \not\approx_{\overline{AD}} C$.

2.6.3 Teorema. El teorema Crossbar.

Supongamos $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$, es decir, A, B y C son puntos no colineales y D pertenece al interior de $\angle BAC$. Entonces la semirrecta $\overrightarrow{AD}$ corta el interior del segmento $\overline{BC}$.

Recíprocamente, si A, B y C son puntos no colineales y B*D*C, entonces $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$.



Demostración. Por el lema anterior (2.6.2) sabemos que $B \not\approx_{\overrightarrow{AD}} C$, es decir, la recta $\overleftrightarrow{AB}$ corta el segmento $\overline{BC}$ en un punto P, $B*P*C$.
Veamos ahora que P pertenece a la semirrecta $\overrightarrow{AD}$.
Supongamos, por el contrario, que P*A*D. Entonces $P \not\approx_{\overrightarrow{AB}} D$, pero D pertenece al interior de $\angle BAC$, luego $D \approx_{\overrightarrow{AB}} C$, y por tanto $P \not\approx_{\overrightarrow{AB}} C$, que está en contradicción con B*P*C, pues $P \in \overrightarrow{BC} \subset [C]_{\overrightarrow{AB}}$ (2.6.1)

Veamos el recíproco: Supongamos que A,B y C son tres puntos no colineales, y B*D*C. Por lo tanto D pertenece a $\overleftrightarrow{BC}$ y podemos aplicar 1.5.5 para deducir que D pertenece al interior de $\angle BAC$.

2.6.4 Proposición. "Squeezing".
Si $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}$ entonces $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$.

Demostración. Si $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$ entonces $\overrightarrow{AD}$ corta $\overleftrightarrow{BC}$ en un punto D' tal que B*D'*C (por 1.7.3)
Puesto que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD'}$ tenemos que $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD'}$, por lo que aplicando nuevamente 1.7.3, existirá un E' en $\overrightarrow{AE}$ tal que B*E'*D'. Luego aplicando 1.4.4, B*E'*D'*C, y por tanto B*E'*C, por lo que, por el recíproco de 1.7.3, llegamos a $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE'} - \overrightarrow{AC}$, es decir, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC}$, y E'*D'C, luego $\overrightarrow{AE'} - \overrightarrow{AD'} - \overrightarrow{AC}$, que es equivalente a $\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$.

2.6.5 Proposición.
Si D está en el interior de $\angle BAC$, el interior de $\angle BAD$ es un subconjunto del interior de $\angle BAC$.

Demostración. Si D está en el interior de $\angle BAC$, entonces $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$.
Sea P un punto del interior de $\angle BAD$. Entonces $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AD}$, luego aplicando la proposición anterior deducimos que $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC}$, es decir, P está en el interior de $\angle BAC$.

2.6.6 Proposición.
Dadas tres semirrectas con origen A, como mucho una de ellas puede estar entre las otras dos.

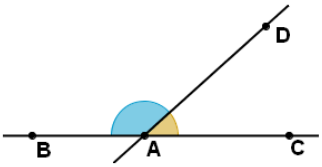
Demostración. Supongamos $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$. Entonces, aplicando 1.7.4 llegaríamos al absurdo $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$.

2.6.7 Ejercicio.
Dibuja en un papel tres semirrectas para las cuales ninguna de ellas está entre las otras dos. El axioma B3 no es válido para la relación de orden que hemos establecido con los ángulos (sólo funciona cuando dos de las semirrectas están en el mismo semiplano que determina la tercera).

2.7 Ángulos suplementarios.

2.7.1 Definición. Ángulos suplementarios.

Diremos que los ángulos $\angle BAD$ y $\angle DAC$ son suplementarios cuando se cumple B*A*C y el punto D no pertenece a $\overleftrightarrow{BC}$.



2.7.2 Proposición. Existencia del ángulo suplementario.

Todo ángulo tiene un ángulo suplementario.

Demostración. Sea un ángulo $\alpha = \angle BAD$. Por el Axioma B2 existirá un punto C tal que B*A*C. El punto D no pertenece a $\overleftrightarrow{BA} = \overleftrightarrow{BC}$, luego tenemos todas las condiciones de la definición de ángulos suplementarios.

2.7.3 Proposición.

Los interiores de dos ángulos suplementarios son disjuntos.

Demostración. Supongamos que E pertenece al interior de $\angle BAC$, luego $E \approx_{\overline{AB}} C$ y $E \approx_{\overline{AC}} B$. Supongamos que E también pertenece al interior de $\angle DAC$, luego $E \approx_{\overline{AC}} D$ y $E \approx_{\overline{DA}} C$. Así pues, por transitividad, tenemos que $E \approx_{\overline{AC}} B$ y $E \approx_{\overline{AC}} D$, luego $B \approx_{\overline{AC}} D$, contradiciendo la hipótesis B*A*C.

2.7.4 Proposición.

Supongamos B*A*C y sea $D \notin \overleftrightarrow{BC}$. Sea E un punto al mismo lado de $\overleftrightarrow{BC}$ que D. Entonces será cierta una y sólo una de las siguientes sentencias: (a) E está en el interior de $\angle BAD$, (b) E está en la semirrecta $\overrightarrow{AD}$, (c) E está en el interior de $\angle CAD$.

Demostración. Si $E \in \overrightarrow{AD}$ entonces no puede pertenecer a ningún interior, puesto que no se puede cumplir $E \approx_{\overline{AD}} B$ ni $E \approx_{\overline{AD}} C$, y se cumple (b).

Supongamos que $E \notin \overrightarrow{AD}$. Entonces $E \notin \overleftrightarrow{AD}$, pues seguro que no pertenece a la semirrecta opuesta a $\overrightarrow{AD}$ pues todos estos puntos están al otro lado de $\overleftrightarrow{BC}$.
Como $E \notin \overleftrightarrow{AD}$, puesto que B*A*C, tenemos que $B \not\approx_{\overline{AD}} C$, luego o bien $E \approx_{\overline{AD}} B$ o bien $E \approx_{\overline{AD}} C$.
Si $E \approx_{\overline{AD}} B$, puesto que además $E \approx_{\overline{BC}} D$ por hipótesis, tenemos que E pertenece al interior de $\angle BAD$ (a), y si $E \approx_{\overline{AD}} C$, puesto que $E \approx_{\overline{BC}} D$, tenemos que E pertenece al interior de $\angle CAD$.
Por 1.8.3 si E pertenece a un interior no puede pertenecer al otro.

2.7.5 Proposición.

Supongamos que B*A*C. Si $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}$ entonces $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC}$.

Demostración. Si $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}$ entonces D pertenece al interior de $\angle BAE$, luego $D \approx_{\overline{AB}} E$.

Por lo tanto, por 1.8.4 o bien (a) $E \in \overrightarrow{AD}$, o bien (b) E pertenece al interior de $\angle BAD$, o bien (c) E pertenece al interior de $\angle CAD$. Veamos que (a) y (b) nos llevan al absurdo:

Si $E \in \overrightarrow{AD}$, entonces $D \in \overrightarrow{AE}$, y D no puede pertenecer al interior de $\angle BAE$, contradiciendo $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}$.

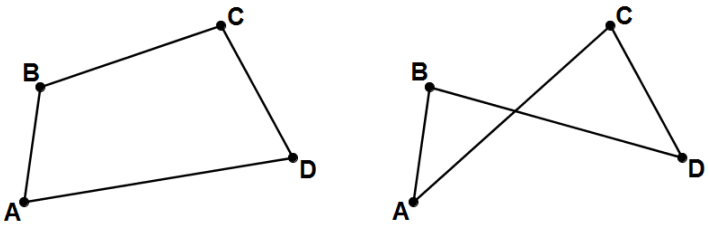
Si E pertenece al interior de $\angle BAD$, entonces $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}$, pero por hipótesis $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}$, contradiciendo la proposición 1.7.6.

2.8 Polígonos. Triángulos. Cuadriláteros.

2.8.1 Definición. Polígono.

Un polígono es un conjunto ordenado de puntos $(P_1, P_2, ..., P_n)$, llamados **vértices**, todos los segmentos entre uno de los puntos y el siguiente $\overline{P_k P_{k+1}}$, y el segmento entre el último punto y el primero $\overline{P_n P_1}$. Estos segmentos se denominarán **lados** del polígono.

Observación. Los vértices no determinan un polígono. Cualquier permutación cíclica de los puntos dejará el polígono invariante, pero en general las permutaciones de los puntos generan polígonos diferentes.
Por ejemplo, dados los siguientes puntos A, B, C y D, los polígonos $\{\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}\}$ y $\{\overline{AC}, \overline{CD}, \overline{DB}, \overline{BA}\}$ son polígonos diferentes.



En el caso del triángulo esto no pasa. Un triángulo sí queda determinado por sus tres vértices.

Diremos que un polígono es **equilátero** cuando todos sus lados sean congruentes.

2.8.2 Definición. Polígonos simples.

Diremos que un polígono es simple cuando cada uno de los lados únicamente corta los lados adyacentes (en los vértices).

2.8.3 Definición. Triángulo. Interior y exterior de un triángulo.

Un triángulo es un polígono de tres lados, es decir, dados A, B, C tres puntos no colineales. Definimos el triángulo ΔABC por

$$\Delta ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$$

Los puntos A, B y C son los **vértices** del triángulo. Los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$ son los **lados** del triángulo. Los ángulos $\angle B = \angle ABC$, $\angle C = \angle ACB$ y $\angle A = \angle CAB$ son los **ángulos** del triángulo.

El **interior del triángulo** ΔABC se define como la intersección de los tres interiores de $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$. El **exterior del triángulo** ΔABC es el conjunto de puntos que no están en el triángulo ni en su interior.

2.8.4 Observación.

Los vértices del triángulo son los únicos puntos que no están entre otros puntos del triángulo. Así pues, los vértices están bien definidos, es decir, no dependen de cómo queda determinado, sólo del triángulo en sí mismo como conjunto de puntos.

2.8.5 Proposición.

Sean A, B, C tres puntos no colineales. El interior del triángulo ΔABC es la intersección de tres semiplanos, en concreto es $[A]_{\overleftrightarrow{BC}} \cap [B]_{\overleftrightarrow{CA}} \cap [C]_{\overleftrightarrow{AB}}$

Demostración.
$P \in Int\ \angle A \cap Int\ \angle B \cap Int\ \angle C \Leftrightarrow$
$P \approx_{\overleftrightarrow{AB}} C \wedge P \approx_{\overleftrightarrow{AC}} B \wedge P \approx_{\overleftrightarrow{AB}} C \wedge P \approx_{\overleftrightarrow{BC}} A \wedge P \approx_{\overleftrightarrow{AC}} B \wedge P \approx_{\overleftrightarrow{BC}} A \Leftrightarrow$
$P \approx_{\overleftrightarrow{AB}} C \wedge P \approx_{\overleftrightarrow{AC}} B \wedge P \approx_{\overleftrightarrow{BC}} A \Leftrightarrow P \in [A]_{\overleftrightarrow{BC}} \cap [B]_{\overleftrightarrow{CA}} \cap [C]_{\overleftrightarrow{AB}}$

2.8.6 Definición. Cuadrilátero.
Un cuadrilátero es un polígono de cuatro lados, es decir, dados cuatro puntos A, B, C y D tales que no hay tres que sean colineales, definimos el cuadrilátero $\Diamond ABCD$ por

$$\Diamond ABCD = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}.$$

Los puntos A, B, C y D se denominan **vértices** del cuadrilátero.
Los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ se denominan **lados**.
Los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son las **diagonales**.
Los cuatro **ángulos** del cuadrilátero se definen por $\angle A = \angle DAB$, $\angle B = \angle ABC$, $\angle C = \angle BCD$, y $\angle D = \angle CDA$.
Los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son **lados opuestos**. Igualmente son lados opuestos los lados $\overline{BC}$ y $\overline{DA}$.
Los vértices A y C son **vértices opuestos**. Igualmente son vértices opuestos B y D.

2.8.7 Definición. Cuadrilátero regular.
Diremos que un cuadrilátero $\Diamond ABCD$ es regular cuando
a) C está en el interior de $\angle A$.
b) D está en el interior de $\angle B$.
c) A está en el interior de $\angle C$.
d) B está en el interior de $\angle D$.

Nota: En 2.8.11 se verá que sólo hace falta que se cumplan dos de las cuatro condiciones.

2.8.8 Lema.
Un cuadrilátero $\Diamond ABCD$ es regular si y sólo si se cumplen las cuatro condiciones siguientes:
i) $\overline{AB}$ no se corta con $\overleftrightarrow{CD}$.
ii) $\overline{BC}$ no se corta con $\overleftrightarrow{DA}$.
iii) $\overline{CD}$ no se corta con $\overleftrightarrow{AB}$.
iv) $\overline{DA}$ no se corta con $\overleftrightarrow{BC}$.

Nota: En 2.8.10 se verá que sólo hace falta que se cumplan tres de las cuatro condiciones.

Demostración. Este lema se deduce directamente de la definición de lateralidad. Por ejemplo, supongamos que C está en el interior de $\angle A$. Entonces $C \approx_{\overleftrightarrow{AB}} D$ y $C \approx_{\overleftrightarrow{AD}} B$.
$C \approx_{\overleftrightarrow{AB}} D$ implica que $\overline{CD}$ no se corta con $\overleftrightarrow{AB}$.

$C \approx_{\overline{AD}} B$ implica que $\overline{CB}$ no se corta con $\overleftrightarrow{AD}$.
De la misma manera se demuestran el resto de implicaciones.

2.8.9 Corolario.
Sea un cuadrilátero $\Diamond ABCD$. Si C está en el interior de $\angle A$ y A está en el interior de $\angle C$ entonces es regular.

Demostración. Veamos que se cumplen las cuatro condiciones del lema 1.9.6. Si C está en el interior de $\angle A$. Entonces $C \approx_{\overline{AB}} D$ y $C \approx_{\overline{AD}} B$. $C \approx_{\overline{AB}} D$ implica que $\overline{CD}$ no se corta con $\overleftrightarrow{AB}$ (condición iii). $C \approx_{\overline{AD}} B$ implica que $\overline{CB}$ no se corta con $\overleftrightarrow{AD}$ (condición ii).
De la misma manera, si A está en el interior de $\angle C$. Entonces $A \approx_{\overline{CD}} B$ y $A \approx_{\overline{BC}} D$.
$A \approx_{\overline{CD}} B$ implica que $\overline{AB}$ no se corta con $\overleftrightarrow{CD}$ (condición i). $A \approx_{\overline{BC}} D$ implica que $\overline{AD}$ no se corta con $\overleftrightarrow{BC}$ (condición iv).

2.8.10 Proposición.
Si tres de las cuatro condiciones del lema 2.8.8 son ciertas, el cuadrilátero es regular.

Demostración.
Supongamos que son ciertas las tres primeras:
i) $\overline{AB}$ no se corta con $\overleftrightarrow{CD}$.
ii) $\overline{BC}$ no se corta con $\overleftrightarrow{DA}$.
iii) $\overline{CD}$ no se corta con $\overleftrightarrow{AB}$.
Supongamos que no se cumple la iv), es decir, $\overline{DA}$ se corta con $\overleftrightarrow{BC}$. Sea $X = \overline{DA} \cap \overleftrightarrow{BC}$.
Se pueden dar tres casos: X*B*C, B*X*C o B*C*X.
El caso B*X*C implica que $\overline{BC}$ corta a $\overline{DA}$, contradiciendo ii).
Supongamos el primer caso: X*B*C.
$\angle A = \angle DAB = \angle XAB$, y puesto que X*B*C, se deduce que C no está en el interior de $\angle A$ (CrossBar Betweenness 1.5.6). Pero las condiciones ii) y iii) juntas aseguran precisamente lo contrario, llegando a una contradicción.
El tercer caso B*C*X nos llevará igualmente a una contradicción, por lo que vemos que la condición iv) se debe cumplir, es decir, el cuadrilátero es regular.

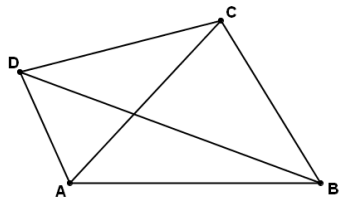
2.8.11 Corolario.
Si un cuadrilátero cumple dos de las cuatro condiciones de la definición 2.8.7 entonces es regular.

Demostración.
Supongamos que se cumple i) y ii).
i) C está en el interior de $\angle A$ implica $C \approx_{\overline{AB}} D \Rightarrow \overline{CD} \cap \overleftrightarrow{AB} = \varnothing$ y también
$C \approx_{\overline{AD}} B \Rightarrow \overline{CB} \cap \overleftrightarrow{AD} = \varnothing$.
ii) D está en el interior de $\angle B$ implica $D \approx_{\overline{AB}} C \Rightarrow \overline{CD} \cap \overleftrightarrow{AB} = \varnothing$ y también
$D \approx_{\overline{BC}} A \Rightarrow \overline{DA} \cap \overleftrightarrow{BC} = \varnothing$.

Por lo tanto se cumplen las condiciones ii), iii) y iv) del lema 1.9.6, luego aplicando el lema 1.9.10, el cuadrilátero es regular.

2.8.12 Proposición.
En todo cuadrilátero regular las diagonales se cortan en un punto.

Demostración. Sea un cuadrilátero regular $\Diamond ABCD$.



Las rectas $\overleftrightarrow{BD}$ y $\overleftrightarrow{AC}$ son diferentes, pues si fueran la misma recta los cuatro puntos serían colineales, contradiciendo la definición de cuadrilátero. Por lo tanto la intersección de $\overleftrightarrow{BD}$ y $\overleftrightarrow{AC}$ será como mucho un punto.
C está en el interior de $\angle DAB$, luego por el teorema CrossBar (1.7.3) la semirrecta $\overrightarrow{AC}$ corta el segmento $\overline{BD}$ en un punto E. Siguiendo el mismo razonamiento, A está en el interior de $\angle DCB$, luego por el teorema CrossBar (1.7.3) la semirrecta $\overrightarrow{CA}$ corta el segmento $\overline{BD}$ en un punto E'. Y puesto que hemos visto al principio que las dos rectas $\overleftrightarrow{BD}$ y $\overleftrightarrow{AC}$ se cortarán como mucho en un punto, nos queda
$E = E' = \overrightarrow{AC} \cap \overrightarrow{CA} \cap \overline{BD} = \overline{AC} \cap \overline{BD}$, puesto que $\overrightarrow{AC} \cap \overrightarrow{CA} = \overline{AC}$ por 1.2.15.

2.8.13 Definición. Trapecio.
Un trapecio es un cuadrilátero $\Diamond ABCD$ en el cual $\overleftrightarrow{AD} // \overleftrightarrow{BC}$ y los puntos C y D están al mismo lado de $\overleftrightarrow{AB}$.
Los dos lados paralelos se llaman **bases del trapecio**. Puesto que, en general, las bases tienen longitudes diferentes, hablamos de base mayor y base menor del trapecio. Los lados no paralelos se llaman **lados oblicuos** o simplemente **lados del trapecio**.

2.8.14 Proposición.
Todos los trapecios son regulares.

Demostración.
Vemos que se cumplen tres de las cuatro condiciones del lema 2.8.8
$\overleftrightarrow{AD} // \overleftrightarrow{BC} \Rightarrow \overline{AD} \cap \overleftrightarrow{BC} = \varnothing$ (iv),
$\overleftrightarrow{AD} // \overleftrightarrow{BC} \Rightarrow \overline{BC} \cap \overleftrightarrow{AD} = \varnothing$ (ii)
C y D están al mismo lado de $\overleftrightarrow{AB}$ implica $\overline{CD} \cap \overleftrightarrow{AB} = \varnothing$ (iii)
Luego aplicando la proposición 2.8.10 deducimos que es regular.

3 Congruencia.

3.1 Los axiomas de congruencia. Planos métricos.

3.1.1 Definición. Axiomas de congruencia. Plano métrico.

Un plano métrico es un plano ordenado al que añadimos una relación entre segmentos $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y una relación entre ángulos $\angle ABC \cong \angle DEF$ cumpliendo los siguientes axiomas:

Axioma C1.

La relación de congruencia entre segmentos es una relación de equivalencia, es decir, cumple las propiedades:

(a) simétrica: $\overline{AB} \cong \overline{A'B'} \Rightarrow \overline{A'B'} \cong \overline{AB}$

(b) reflexiva: $\overline{AB} \cong \overline{AB}$

(c) transitiva: $\overline{AB} \cong \overline{A'B'} \wedge \overline{AB} \cong \overline{A''B''} \Rightarrow \overline{A'B'} \cong \overline{A''B''}$

Axioma C2.

Sea $\overline{AB}$ un segmento y $\overrightarrow{CD}$ una semirrecta. Entonces existe un único punto $E \in \overrightarrow{CD}$ tal que $\overline{AB} \cong \overline{CE}$.

Axioma C3.

Si $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ y C es un punto tal que A*C*B, entonces existirá un punto C' tal que A'*C'*B' y $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ y $\overline{CB} \cong \overline{C'B'}$. Más adelante se demostrará que dicho punto es único.

Axioma C4.

La relación de congruencia entre ángulos es una relación de equivalencia, es decir, cumple las propiedades:.

(a) simétrica: $\angle BAC \cong \angle B'A'C' \Rightarrow \angle B'A'C' \cong \angle BAC$

(b) reflexiva: $\angle BAC \cong \angle BAC$

(c) transitiva: $\angle BAC \cong \angle B'A'C' \wedge \angle B'A'C' \cong \angle B''A''C'' \Rightarrow \angle BAC \cong \angle B''A''C''$

Axioma C5. (Elementos 1.23)

Sea $\angle BAC$ un ángulo y $\overrightarrow{DE}$ una semirrecta. Entonces en cualquiera de los dos lados de $\overrightarrow{DE}$ existirá una única semirrecta $\overrightarrow{DF}$ tal que $\angle BAC \cong \angle EDF$.

Axioma C6.

Diremos que dos triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ son **congruentes**, y escribiremos $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$, cuando podamos establecer una biyección entre sus vértices

$$A \leftrightarrow A' \quad B \leftrightarrow B' \quad C \leftrightarrow C'$$

de forma que se correspondan lados y ángulos congruentes:

$$\angle A \cong \angle A',\ \angle B \cong \angle B',\ \angle C \cong \angle C',\ \overline{AB} \cong \overline{A'B'},\ \overline{BC} \cong \overline{B'C'} \text{ y } \overline{AC} \cong \overline{A'C'}.$$

Sea ABC un triángulo y $\overline{A'B'}$ un segmento tal que $\overline{A'B'} \cong \overline{AB}$. Entonces en cada uno de los lados de $\overleftrightarrow{A'B'}$ existirá un punto C' tal que $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

3.1.2 Observación.
La congruencia entre triángulos será claramente una relación de equivalencia, pues lo son por separado la congruencia de segmentos y de ángulos.

3.1.3 Proposición.
El punto C' del axioma C3 es único.

Demostración. Sea $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ y C un punto tal que A*C*B. Sea el punto C' tal que A'*C'*B' y $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ y $\overline{CB} \cong \overline{C'B'}$.
Supongamos que existe otro punto C'' tal que A'*C''*B' y $\overline{AC} \cong \overline{A'C''}$ y $\overline{CB} \cong \overline{C''B'}$.
Entonces $C', C'' \in \overrightarrow{A'B'}$ cumpliendo ambos $\overline{AC} \cong \overline{A'C''}$ y $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, luego $C' = C''$ por la unicidad del axioma C2.

3.1.4 Proposición.
El punto C' del axioma C6 es único.

Demostración. Supongamos que existe un C'' que también cumple las condiciones del axioma.
Entonces $\angle CAB \cong \angle C'A'B'$ y también $\angle CAB \cong \angle C''A'B'$, luego por la unicidad del axioma C5 tenemos que $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'C''}$. Pero también tenemos que $\overline{AC} \cong \overline{AC'}$ y $\overline{AC} \cong \overline{AC''}$, luego por la unicidad del axioma C2 tenemos que $C' = C''$.

3.1.5 Proposición. Criterio SAS de congruencia de triángulos. (Elementos 1.4)
Sean dos triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ para los cuales se cumple:

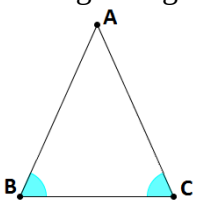
i) $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$
ii) $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$
iii) $\angle A \cong \angle A'$

Entonces $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

Demostración. Por el axioma C6 existirá un punto D en el mismo lado que C' respecto de la recta $\overleftrightarrow{A'B'}$ tal que $\Delta ABC \cong \Delta A'B'D$.
Puesto que $\angle A \cong \angle A'$ y $\angle A \cong \angle B'A'D$, por la unicidad del axioma C5, $\overrightarrow{A'D} = \overrightarrow{A'C'}$.
Por otro lado $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ y $\overline{AC} \cong \overline{A'D}$, y por tanto $C' = D$ (axioma C2) y por tanto $\Delta ABC \cong \Delta A'B'D = \Delta A'B'C'$.

3.1.6 Definición. Triángulo isósceles. (Elementos 1 Definición 20)
Un triángulo es isósceles cuando tenga dos lados congruentes.

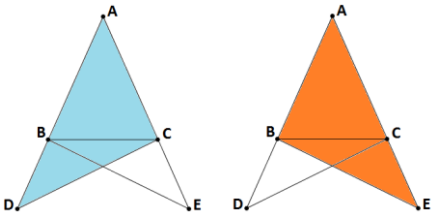
3.1.7 Proposición. (Elementos 1.5)
Un triángulo ΔABC isósceles tiene dos ángulos iguales.



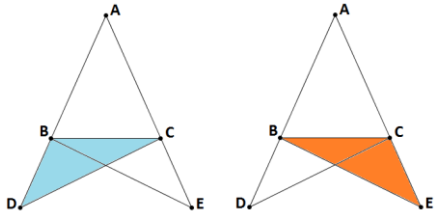
$$\overline{AB} \cong \overline{AC} \Rightarrow \angle B \cong \angle C$$

Observación: La implicación contraria también es cierta y se demostrará en 3.8.3.

Demostración. Basta aplicar el criterio SAS a los triángulos ΔABC y ΔACB.
Una demostración alternativa clásica, que encontramos en Elementos 1.5, se llama ("**Pons Asinorum**"):
Sea ΔABC un triángulo isósceles, con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$. Prolongamos el segmento $\overline{AB}$ hasta un punto F cualquiera $A*B*D$ (axioma B2).
De la misma forma prolongamos el segmento $\overline{AC}$ hasta un punto E, $A*B*E$, y tomamos dicho punto de forma que $\overline{AD} \cong \overline{AE}$.
Puesto que $\overline{AD} \cong \overline{AE}$, $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ y $\angle BAC \cong \angle BAC$, aplicando el criterio SAS de congruencia de triángulos deducimos que $\Delta ACD \cong \Delta ABE$.



Luego $\angle ADC \cong \angle AEB$, $\angle ABE \cong \angle ACD$ y $\overline{CD} \cong \overline{BE}$.
Puesto que $\overline{AD} \cong \overline{AE}$ y $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ se deduce que $\overline{BD} \cong \overline{CE}$.
Por lo tanto podemos aplicar nuevamente el criterio SAS para deducir que $\Delta BCD \cong \Delta CBE$.



Por lo tanto $\angle BCD \cong \angle CBE$. Y puesto que $\angle ABE \cong \angle ACD$, restando los ángulos llegamos a $\angle ABC \cong \angle ACB$, tal y como queríamos ver.

3.7.1b Problema.
Resuelve el problema #81 de [Prob2]. Este problema es muy famoso y en su solución únicamente se utiliza la propiedad fundamental del triángulo isósceles.

3.1.8 Definición. Triángulo equilátero. (Elementos 1 Definición 20)
Un triángulo es equilátero cuando tenga los tres lados congruentes.

3.1.9 Proposición. Ángulos de un triángulo equilátero.
Todo triángulo equilátero tiene sus tres ángulos congruentes.

Demostración. Basta aplicar el criterio SAS a los triángulos ΔABC, ΔACB y ΔBAC.

3.1.10 Triángulo escaleno. (Elementos 1 Definición 20)
Un triángulo es escaleno cuando sus lados no son congruentes.

3.2 Congruencia y comparación de segmentos.

3.2.1 Proposición. Suma de segmentos.

Si A*B*C, A'*B'*C', $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ y $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, entonces $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$.

Demostración. Por el axioma C2 existirá un punto $C'' \in \overrightarrow{A'C'}$ tal que $\overline{AC} \cong \overline{A'C''}$.
Queremos ver que C''=C'.
Existirá un punto $B'' \in \overline{A'C''}$ tal que $\overline{AB} \cong \overline{A'B''}$ y $\overline{BC} \cong \overline{B''C''}$
Pero $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, luego por unicidad tenemos que $B' = B''$.
Ahora bien, tenemos que $\overline{BC} \cong \overline{B''C''} = \overline{B'C''}$ y $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, luego por unicidad llegamos a C''=C'.

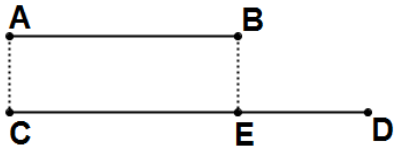
3.2.2 Resta de segmentos.

Supongamos que $A*B*C$ y $A'*B'*C'$. Si $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ y $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ entonces $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$.

Demostración. Por C3 existirá un punto X en $\overrightarrow{A'C'}$ tal que $\overline{AB} \cong \overline{A'X}$ y $\overline{BC} \cong \overline{XC'}$.
Pero por la unicidad de C2 tenemos que X=B', y por tanto $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$.

3.2.3 Definición. Ordenación de segmentos.

Sean dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. Diremos que $\overline{AB} < \overline{CD}$ (o equivalentemente $\overline{CD} > \overline{AB}$) cuando exista un punto E tal que C*E*D y $\overline{AB} \cong \overline{CE}$.



3.2.4 Proposición. Substitución.

Si $\overline{AB} < \overline{CD}$ y $\overline{CD} \cong \overline{C'D'}$, entonces $\overline{AB} < \overline{C'D'}$. Si $\overline{AB} < \overline{CD}$ y $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, entonces $\overline{A'B'} < \overline{CD}$.

Demostración. $\overline{AB} < \overline{CD} \Rightarrow \exists B', C*B'*D \wedge \overline{AB} \cong \overline{CB'}$. Por C3, existirá un B'' en $\overline{C'D'}$ tal que $\overline{CB'} \cong \overline{C'B''}$, luego $\overline{AB} \cong \overline{CB'} \cong \overline{C'B''}$, y por tanto $\overline{AB} < \overline{C'D'}$.
$\overline{AB} < \overline{CD} \Rightarrow \exists B', C*B'*D \wedge \overline{AB} \cong \overline{CB'}$. luego $\overline{A'B'} \cong \overline{AB} \cong \overline{CB'}$, y por tanto $\overline{A'B'} < \overline{CD}$.

3.2.5 Proposición.

Si $A*B*C$ entonces $\overline{AB} < \overline{AC}$.

Demostración. Se deduce directamente de la definición (3.2.3), con el hecho de que $\overline{AB} \cong \overline{AB}$.

3.2.6 Proposición. Transitividad de la ordenación de segmentos.

Si $\overline{AB} < \overline{CD}$ y $\overline{CD} < \overline{EF}$ entonces $\overline{AB} < \overline{EF}$.

Demostración. $\overline{AB} < \overline{CD} \Rightarrow \exists B' | C*B'*D \wedge \overline{AB} \cong \overline{CB'}$.

$\overline{CD} < \overline{EF} \Rightarrow \exists D' | \, E * D' * F \wedge \overline{CD} \cong \overline{ED'}$

Puesto que C*B'*D y $\overline{CD} \cong \overline{ED'}$, por el axioma C3 existirá B'' tal que E*B''*D' y $\overline{CB'} \cong \overline{EB''}$.

E*B''*D' y E*D'*F implica E*B''*D'*F (1.4.4) luego E*B''*F, y por tanto, de la cadena de congruencias $\overline{AB} \cong \overline{CB'} \cong \overline{CB'} \cong \overline{EB''}$ obtenemos $\overline{AB} < \overline{ED'}$.

3.2.7 Lema.

Si $\overline{AB}$ es un segmento, no es cierto $\overline{AB} < \overline{AB}$.

Demostración. Si $\overline{AB} < \overline{AB}$, entonces por definición existirá un B' tal que A*B'*B y $\overline{AB} \cong \overline{AB'}$.

Pero $B' \in \overrightarrow{AB}$, luego por unicidad del axioma C2, $B' = B$, pero es imposible A*B*B por el axioma B1(c).

3.2.8 Proposición. Tricotomía.

Si $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son dos segmentos, ocurre una y sólo una de las siguientes afirmaciones: (i) $\overline{AB} < \overline{CD}$, (ii) $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, (iii) $\overline{AB} > \overline{CD}$.

Demostración. Consideramos el segmento $\overline{AB}$ y la semirrecta $\overrightarrow{CD}$. Por el axioma C2 existirá un único punto $E \in \overrightarrow{CD}$, tal que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

Entonces, (a) C*E*D o (b) E=D o (c) C*D*E.

Si sucede (a), significa que $\overline{AB} < \overline{CD}$. Si sucede (b), entonces $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, y si sucede (c), tenemos que $\overline{CD} < \overline{CE}$ por 2.2.5, y puesto que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, se deduce que $\overline{AB} < \overline{CE}$ por 2.2.3.

Veamos ahora que son incompatibles entre ellas: Si sucede (i) y (ii) entonces $\overline{AB} < \overline{AB}$, si sucede (i) y (iii), por la transitividad (2.2.6), llegamos también al absurdo $\overline{AB} < \overline{AB}$, y por último, si sucede (ii) y (iii), llegamos a $\overline{AB} > \overline{AB}$. En todos los casos llegamos a contradecir el lema anterior 2.2.7.

3.2.9 Proposición.

Supongamos que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE}$. Entonces $\overline{AD} < \overline{AE} \Rightarrow A * D * E$.

Demostración. Si $\overline{AD} < \overline{AE}$ entonces existe un punto F en $\overline{AE}$ tal que $\overline{AD} \cong \overline{AF}$, luego A*F*E. Pero por la unicidad del axioma C2, F=D.

3.3 Congruencia de ángulos.

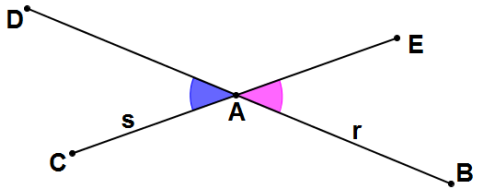
3.3.1 Proposición.

Supongamos que α y β son dos ángulos suplementarios, y que α' y β' también son dos ángulos suplementarios. Entonces si $\alpha \cong \alpha'$ entonces $\beta \cong \beta'$.

Demostración. Supongamos que $\alpha = \angle ABC$, $\beta = \angle CBD$, con D*B*A.
Por otro lado $\alpha' = \angle A'B'C'$ y $\beta' = \angle C'B'D'$, con D'*B'*A'.
Supongamos además que $\alpha \cong \alpha'$.
Por el axioma C2 podemos encontrar un punto $A'' \in B'A'$, tal que $\overline{BA} \cong \overline{B'A''}$. De la misma manera existirá un punto $C'' \in B'C'$, tal que $\overline{BC} \cong \overline{B'C''}$ y un punto $D'' \in B'D'$, tal que $\overline{BD} \cong \overline{B'D''}$.
Los triángulos ΔABC y $\Delta A''B''C''$ son congruentes por SAS y por tanto $\overline{AC} \cong \overline{A''C''}$ y $\angle A \cong \angle A''$.
Aplicando suma de segmentos (2.1.1) $\overline{DA} \cong \overline{D''A''}$, por lo que los triángulos ΔDAC y $\Delta D''A''C''$ serán congruentes nuevamente por SAS. Por lo tanto $\angle D \cong \angle D''$ y $\overline{DC} \cong \overline{D''C''}$.
Nuevamente por SAS obtenemos que los triángulos ΔDCB y $\Delta D''C''B''$ serán congruentes, y así pues $\angle B \cong \angle B'$, tal y como queríamos ver.

3.3.2 Definición. Ángulos opuestos por el vértice.

Sean r y s dos rectas que se cortan en un punto A. Supongamos $B, D \in r$ y $C, E \in s$ tales que B*A*D y C*A*E. Entonces diremos que los ángulos $\angle BAE$ y $\angle DAC$ son ángulos opuestos por el vértice.



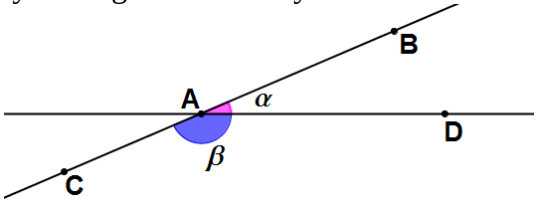
3.3.3 Proposición. (Elementos 1.15)

Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.

Demostración. $\angle BAC$ es suplementario con $\angle BAE$. $\angle EAD$ también es suplementario con $\angle BAE$. $\angle BAE$ es congruente consigo mismo (Axioma C4a)
Luego basta aplicar la proposición 3.3.1.

3.3.4 Proposición. (Elementos 1.14)

Sea $\overleftrightarrow{AD}$ una recta y sean B y C dos puntos en lados opuestos de $\overleftrightarrow{AD}$. Supongamos que α y β son dos ángulos suplementarios tales que $\alpha \cong \angle BAD$ y $\beta \cong \angle DAC$. Entonces B, A y C son colineales y los ángulos $\angle BAD$ y $\angle DAC$ también son suplementarios.



Demostración. Sea E un punto tal que B*A*E (axioma B2).
$\angle BAD$ y $\angle DAE$ son suplementarios. Puesto que $\alpha \cong \angle BAD$, deducimos que $\beta \cong \angle DAE$ por 2.3.1.
Pero también $\beta \cong \angle DAC$, por lo tanto $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC}$ por la unicidad del axioma C5 (de B*A*E deducimos que B y E están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{AD}$ y por tanto E y C están en el mismo lado)
Luego $C \in \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE} \subset \overleftrightarrow{AB}$ y por tanto A, B y C son colineales.
Puesto que B y C están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{AD}$, existirá un punto $X \in \overline{BC} \cap \overleftrightarrow{AD}$.
$A \in \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{AD}$ y es el único punto de esta intersección (pues $\overleftrightarrow{BC} \neq \overleftrightarrow{AD}$), luego X=A.
Así pues, $A \in \overline{BC} \Rightarrow B*A*C$ y por tanto los ángulos $\angle BAD$ y $\angle DAC$ son suplementarios.

3.3.5 Proposición. Suma de ángulos.
Sea D un punto perteneciente al interior de $\angle BAC$, y D' un punto perteneciente al interior de $\angle B'A'C'$. Si $\angle BAD \cong \angle B'A'D'$ y $\angle DAC \cong \angle D'A'C'$, entonces $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$.

Demostración. Aplicando el teorema Crossbar (1.7.3), existirá un $E \in \overrightarrow{AD}$ tal que C*E*B. Esto demuestra, por otro lado, que C y B están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{AD}$.
Aplicando el axioma C5, existirá un punto $B'' \in \overrightarrow{A'B'}$ tal que $\overline{AB} \cong \overline{A'B''}$, y también existirá un punto $C'' \in \overrightarrow{A'C'}$ tal que $\overline{AC'} \cong \overline{A'C''}$.
Sustituyendo si es necesario, podemos suponer que $B'' = B'$ y $C'' = C'$.
Por último, existirá un punto $E' \in \overrightarrow{A'D'}$ tal que $\overline{AE} \cong \overline{A'E'}$.
Observamos que de momento no podemos garantizar que B'*E'*C'.
Puesto que $\angle BAE \cong \angle B'A'E'$, $\overline{AB} \cong \overline{A'B''}$ y $\overline{AE} \cong \overline{A'E'}$, podemos aplicar SAS y deducir que $\Delta BAE \cong \Delta B'A'E'$, luego $\overline{BE} \cong \overline{B'E'}$ y $\angle AEB \cong \angle A'E'B'$.
Ahora podemos volver a aplicar SAS puesto que $\angle EAC \cong \angle E'A'C'$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, y $\overline{AE} \cong \overline{A'E'}$, luego $\Delta EAC \cong \Delta E'A'C'$, y por tanto $\overline{EC} \cong \overline{E'C'}$ y $\angle AEC \cong \angle A'E'C'$.
Puesto que $\angle AEB \cong \angle A'E'B'$, $\angle AEC \cong \angle A'E'C'$ y C*E*B, $\angle A'E'B'$ y $\angle A'E'C'$ son dos ángulos congruentes con dos ángulos suplementarios, luego son suplementarios y B'*E'*C' (2.3.3). Y puesto que $\overline{EC} \cong \overline{E'C'}$ y $\overline{BE} \cong \overline{B'E'}$, tenemos que $\overline{CB} \cong \overline{C'B'}$ (por 2.2.1), y aplicando SAS (hemos visto anteriormente que $\angle ABC \cong \angle A'B'E' = \angle A'B'C'$) deducimos que $\Delta BAC \cong \Delta B'A'C'$, y por tanto $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$.

3.3.6 Proposición.
Supongamos que $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, y supongamos que $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$, es decir, D está en el interior de $\angle BAC$. Entonces existirá una única semirrecta $\overrightarrow{A'D'}$ tal que $\overrightarrow{A'B'} - \overrightarrow{A'D'} - \overrightarrow{A'C'}$, $\angle BAD \cong \angle B'A'D'$ y $\angle DAC \cong \angle D'A'C'$.

Esta proposición es el equivalente para ángulos del axioma C3 de segmentos.

Demostración. Existirá un $B'' \in \overrightarrow{A'B'}$ tal que $\overline{AB} \cong \overline{A'B''}$. (Axioma C2)
Existirá un $C'' \in \overrightarrow{A'C'}$ tal que $\overline{AC} \cong \overline{A'C''}$. (Axioma C2)
Puesto que $\angle BAC \cong \angle B'A'C' = \angle B''A'C''$, podemos aplicar SAS para deducir que $\Delta BAC \cong \Delta B''A'C''$, y por tanto $\overline{BC} \cong \overline{B''C''}$, y $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$.

Existirá un punto $E \in \overrightarrow{AD}$ tal que C*E*B (por CrossBar 1.7.3), y puesto que $\overline{BC} \cong \overline{B''C''}$, existirá un punto $E' \in \overline{B'C'}$, es decir $B'*E'*C'$, tal que $\overline{BE} \cong \overline{B'E'}$ y $\overline{CE} \cong \overline{C'E'}$ (axioma C3).
Veamos que la semirrecta $\overrightarrow{A'E'}$ cumple las condiciones deseadas.
E' pertenece al interior de $\angle B'A'C'$ por 1.5.6.
$\angle ABC \cong \angle A'B'C' = \angle A'B'E'$, $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ y $\overline{BE} \cong \overline{B'E'}$, luego $\Delta ABE \cong \Delta A'B'E'$ por SAS, y por tanto $\angle BAD = \angle BAE \cong \angle B'A'E'$, $\angle AEB \cong \angle A'E'B'$, y $\overline{AE} \cong \overline{A'E'}$.
Puesto que $\angle AEB \cong \angle A'E'B'$, $\angle AEC \cong \angle A'E'C'$, pues ambos son suplementarios de dos ángulos congruentes (2.3.1).
Puesto que $\overline{CE} \cong \overline{C'E'}$, $\overline{AE} \cong \overline{A'E'}$ y $\angle AEC \cong \angle A'E'C'$, podemos aplicar SAS para deducir que $\Delta AEC \cong \Delta A'E'C'$, y por tanto $\angle DAC = \angle EAC \cong \angle E'A'C'$.

Veamos ahora la unicidad de dicha semirrecta. Supongamos que existe una segunda semirrecta $\overrightarrow{A'D''}$ tal que $\overrightarrow{A'B'} - \overrightarrow{A'D''} - \overrightarrow{A'C'}$, $\angle BAD \cong \angle B'A'D''$ y $\angle DAC \cong \angle D''A'C'$.
Los puntos D' y D'' estarán al mismo lado de la recta $\overleftrightarrow{A'B'}$, pues D'' está en el interior de $\angle B'A'C'$, luego $D'' \approx_{\overleftrightarrow{A'B'}} C'$, y D' también pertenece al interior de $\angle B'A'C'$, luego $D' \approx_{\overleftrightarrow{A'B'}} C'$, por tanto, $D' \approx_{\overleftrightarrow{A'B'}} D''$ por transitividad de la colateralidad de puntos (1.3.1c).
Por la unicidad del axioma C5, $\overrightarrow{A'D''} = \overrightarrow{A'D'}$.

3.3.7 Proposición. Resta de ángulos.
Sea D un punto perteneciente al interior de $\angle BAC$, y D' un punto perteneciente al interior de $\angle B'A'C'$. Si $\angle BAD \cong \angle B'A'D'$ y $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, entonces $\angle DAC \cong \angle D'A'C'$.

Demostración. Aplicando la proposición 2.3.5, existirá una única semirrecta $\overrightarrow{A'D''}$ tal que $\overrightarrow{A'B'} - \overrightarrow{A'D''} - \overrightarrow{A'C'}$, $\angle BAD \cong \angle B'A'D''$ y $\angle DAC \cong \angle D''A'C'$.
D'' y D' están en el mismo lado de $\overleftrightarrow{A'B'}$ (por el mismo razonamiento que hemos hecho en la unicidad de la demostración de 2.3.6), y por lo tanto $\angle DAC \cong \angle D''A'C' = \angle D'A'C'$.

3.4 Comparación de ángulos.

3.4.1 Definición. "<" para ángulos.
Dados dos triángulos $\angle BAC$ y $\angle DEF$, diremos que $\angle BAC < \angle DEF$ (o $\angle DEF > \angle BAC$) si existe una semirrecta $\overrightarrow{EG}$ tal que $\overrightarrow{ED} - \overrightarrow{EG} - \overrightarrow{EF}$ y $\angle BAC \cong \angle DEG$.
Es decir, existe un punto G en el interior de $\angle DEF$ tal que $\angle DEG \cong \angle BAC$.
Es importante remarcar que G está en el interior y no en el propio ángulo $\angle DEF$, para así garantizar que no se cumple $\alpha < \alpha$ (ver 2.4.6).

3.4.2 Proposición. Substitución.
Sean cuatro ángulos $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$. Si $\alpha < \beta$ y $\alpha \cong \alpha'$ entonces $\alpha' < \beta$. Si $\alpha < \beta$ y $\beta \cong \beta'$ entonces $\alpha < \beta'$.

Demostración. Sean $\alpha = \angle BAC$, $\alpha' = \angle B'A'C'$, $\beta = \angle DEF$ y $\beta' = \angle D'E'F'$.
Supongamos que $\alpha < \beta$. Entonces existirá un punto G en el interior de β tal que $\alpha \cong \angle DEG$.
Supongamos que $\alpha \cong \alpha'$. Luego $\alpha' \cong \alpha \cong \angle DEG$, y por tanto $\alpha' < \beta$.
Supongamos $\beta \cong \beta'$. Por 2.3.6, existirá un punto G' en el interior de β' tal que $\angle DEG \cong \angle D'E'G'$.
Luego $\alpha \cong \angle DEG \cong \angle D'E'G'$, es decir, $\alpha < \beta'$.

3.4.3 Proposición.
Si $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$, entonces $\angle BAD < \angle BAC$.

Demostración. Basta aplicar la propia definición y tener en cuenta que $\angle BAD \cong \angle BAD$.

3.4.4 Proposición. Transitividad en el orden de ángulos.
Si α, β, γ son ángulos tales que $\alpha < \beta$ y $\beta < \gamma$, entonces $\alpha < \gamma$.

Demostración. Sea $\alpha = \angle ABC$, $\beta = \angle A_2B_2C_2$ y $\gamma = \angle A_3B_3C_3$. Existe un D_2 en el interior de β tal que $\alpha \cong \angle A_2D_2C_2$. Aplicando 2.3.6, existirá un punto D_3 en el interior de γ tal que $\angle A_2B_2D_2 \cong \angle A_3B_3D_3$, luego por la transitividad de la congruencia de ángulos, $\alpha \cong \angle A_3B_3D_3$, es decir, $\alpha < \gamma$.

3.4.5 Proposición.
Sean α y β dos ángulos suplementarios, y α' y β' otros dos ángulos suplementarios. Si $\alpha > \alpha'$ entonces $\beta < \beta'$.

Demostración. Tenemos por un lado $D*A*B$, $\alpha = \angle BAE$ y $\beta = \angle DAE$, y por otro lado $D'*A'*B'$, $\alpha' = \angle B'A'E'$ y $\beta' = \angle D'A'E'$.
Si $\alpha > \alpha'$ entonces existe un E en el interior de α tal que $\angle BAE \cong \alpha'$.
$\angle BAE$ y $\angle DAE$ son ángulos suplementarios, luego $\angle DAE \cong \angle D'A'C'$, el suplementario de α' (2.3.1)
Aplicando ahora 2.3.6, puesto que C está en el interior de $\angle DAE$, existirá un punto F en el interior de $\angle D'A'C' = \beta$ tal que $\beta = \angle DAC \cong \angle DA'F$, es decir, que $\beta < \beta'$.

3.4.6 Lema.
No puede suceder que $\alpha < \alpha$.

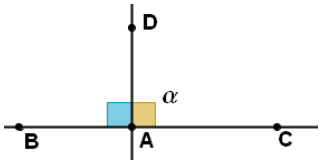
Demostración. Sea $\alpha = \angle BAC$. Si $\alpha < \alpha$ existirá un D en el interior de $\angle BAC$ tal que $\angle BAC \cong \angle BAD$. Pero C y D están en al mismo lado de $\overleftrightarrow{AB}$, luego por la unicidad del axioma C5 tenemos que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$, luego D no puede pertenecer al interior de $\angle BAC$.

3.4.7 Proposición. Tricotomía de ángulos.
Sean dos ángulos α y β. Entonces sucede una y sólo una de las siguientes afirmaciones: (a) $\alpha < \beta$, (b) $\alpha \cong \beta$, (c) $\alpha > \beta$.

Demostración. Sean tres puntos C*A*B de una recta r, y D, E dos puntos en el mismo lado de la recta tales que $\angle BAD \cong \alpha$ y $\angle BAE \cong \beta$ (axioma C5).
Por 1.8.4, sucederá una y sólo una de las siguientes afirmaciones:
(a) E pertenece al interior de $\angle BAD$, (b) E pertenece a semirrecta $\overrightarrow{AD}$ o (c) E pertenece al suplementario de $\angle BAD$.
Si sucede (a) entonces $\beta < \alpha$. Si sucede (b) $\beta \cong \alpha$, si sucede (c) tenemos que $\angle EAC < \angle DAC$, pero entonces $\angle BAD > \angle EAC$ por 2.4.5, es decir, $\alpha > \beta$.
Acabamos de ver que se da al menos una de las afirmaciones anteriores. Veamos que son incompatibles entre ellas, es decir, que sólo se puede dar una a la vez. Veremos que todas las posibilidades llegan a $\alpha < \alpha$, que contradice la proposición 2.4.6.
Si se cumple (a) y (b) tenemos que $\alpha < \alpha$.
De la misma forma, si se cumple (b) y (c) llegamos a $\alpha > \alpha$.
Y, por último, si se cumple (a) $\alpha < \beta$ y (c) $\alpha > \beta$, por transitividad (2.4.4) se llega igualmente a $\alpha < \alpha$.

3.5 Ángulos rectos y rectas perpendiculares.

3.5.1 Definición. Ángulo recto ("Vertical angle"). (Elementos 1 Definición 10)
Diremos que un ángulo α es recto cuando tenga un ángulo suplementario congruente. Recordemos que en 1.8.2 se demostró la existencia del ángulo suplementario.



3.5.2 Proposición.
Sea α un ángulo recto. Entonces:
i) Todo ángulo β congruente con α también es recto.
ii) Todo ángulo suplementario de α también es recto.

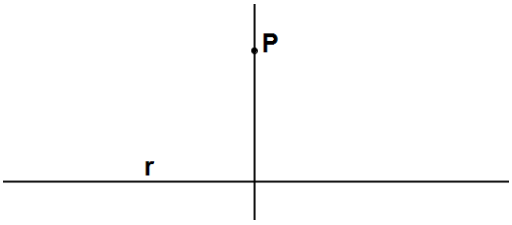
Demostración. i) Sea α' un ángulo suplementario de α. Por definición, $\alpha' \cong \alpha$.
Sea $\beta \cong \alpha$, y sea β' un ángulo suplementario a β.
Por la proposición 2.3.1, $\beta' \cong \alpha'$, y por transitividad de la relación de congruencia, $\beta' \cong \alpha' \cong \alpha \cong \beta$.
ii) Si β es un ángulo suplementario de α, por definición de ángulo recto $\beta \cong \alpha$, y basta aplicar i).

3.5.3 Proposición. (Elementos 1 Postulado 4)
Dos ángulos rectos son congruentes.

Demostración. Sea α un ángulo y β suplementario de α. Supongamos que $\alpha \cong \beta$.
Por otro lado, sea α' otro ángulo y β' suplementario de α'. Supongamos que $\alpha' \cong \beta'$.
Tenemos que ver que $\alpha \cong \alpha'$.
Supongamos que $\alpha < \alpha'$. Entonces $\beta > \beta'$, por 2.4.5.
Pero $\alpha \cong \beta$ y $\alpha' \cong \beta'$, luego $\alpha > \alpha'$, contradiciendo la tricotomía de ángulos (2.4.7).
De la misma forma se demuestra que no es posible $\alpha > \alpha'$, y por tricotomía (2.4.7) se deduce que $\alpha \cong \alpha'$.

3.5.4 Definición. Rectas perpendiculares.
Diremos que dos rectas r y s son perpendiculares, y escribiremos $r \perp s$, cuando:
i) Tengan un punto A en común.
ii) Exista un $B \neq A$ en r y $C \neq A$ en s tales que $\angle BAC$ sea recto.

3.5.5 Proposición. Existencia de la recta perpendicular por un punto exterior. (Elementos 1.12)
Si r es una recta y $P \notin r$, entonces existe una recta s que pasa por P y es perpendicular a r.



Nota: La unicidad de dicha recta se demostrará después en 3.6.5.

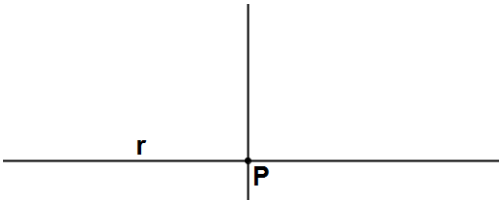
Demostración.

Sean $A, B \in r$, $A \neq B$. (Axioma I2)
Sea P' en el lado opuesto de P respecto a la recta r tal que $\angle BAP \cong \angle BAP'$. (Axioma C5)
Sea $P'' \in AP'$ tal que $\overline{AP} \cong \overline{AP''}$. (Axioma C2)
P y P'' están en lados opuestos de r, luego existirá un $Q \in r$ tal que P*Q*P''.
Si $A = Q$ entonces tenemos P*A*P'', y $\angle BAP \cong \angle BAP' = \angle BAP''$, luego los ángulos son suplementarios y congruentes, luego son ángulos rectos.
Si $A \neq Q$ nos encontramos con dos casos posibles: Si $B \in \overrightarrow{AQ}$
$\angle BAP \cong \angle BAP'' \Rightarrow$
$\angle QAP \cong \angle QAP'' \Rightarrow (SAS)$
$\Delta QAP \cong \Delta QAP'' \Rightarrow$
$\angle AQP \cong \angle AQP''$
Y puesto que P*Q*P'' tenemos que $\angle AQP$ es recto.
Si $B \in \overrightarrow{AQ}$, entonces $\angle BAP$ y $\angle QAP$ son ángulos suplementarios, y podemos llegar a $\angle QAP \cong \angle QAP''$ aplicando 2.3.1.

3.5.6 Corolario. Existencia de ángulos rectos y de rectas perpendiculares.
Los ángulos rectos existen. Las rectas perpendiculares existen.

Demostración. Por el axioma I3 existirán tres puntos A, B, C no alineados. Sea $r = \overleftrightarrow{AB}$.
Por la proposición 2.5.5 existirá una recta perpendicular a r por C.
Sea P su punto de intersección. El ángulo $\angle CPB$ será recto.

3.5.7 Proposición. Existencia y unicidad de la recta perpendicular que pasa por un punto de la misma (Elementos I.11).
Si r es una recta y $P \in r$, entonces existe una única recta s que pasa por P y es perpendicular a r.



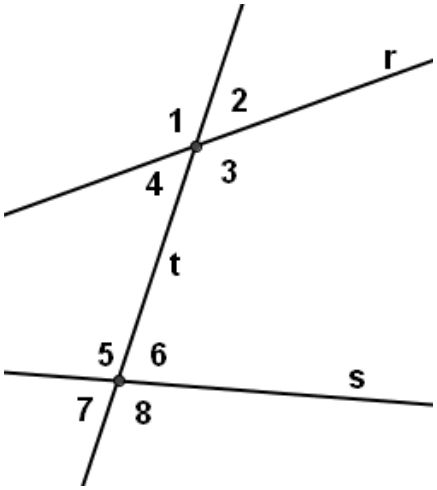
Demostración. Sea r una recta y $P \in r$.
Sea Q otro punto de r. (Axioma I2)
Sea α un ángulo recto (corolario 2.5.6)
Sea A un punto tal que $\angle APQ \cong \alpha$ (axioma C5)

Entonces $\angle APQ$ es un ángulo recto por 2.5.2(a)
Sea $s = \overleftrightarrow{AP}$. Las rectas s y r son perpendiculares.

Veamos ahora la unicidad. Supongamos que existe otra recta s_2 tal que $P \in s_2$ y también es perpendicular a r. Es decir que podemos encontrar puntos $X, Y \in s_2$, cumpliendo X*P*Y, y puntos $B, C \in r$, B*P*C, para los que $\angle YPC$ es recto. Supongamos que Y y A están en el mismo lado respecto a r (en caso contrario cogemos el punto X). Puesto que $\angle APQ$ es recto, por el axioma C5 se deduce que $\overrightarrow{PY} = \overrightarrow{PA}$, por lo que $Y \in \overrightarrow{PA}$ y por tanto $s_2 = s$.

3.6 El teorema de los ángulos internos alternos.

3.6.1 Definición. Ángulos determinados por dos rectas y una secante común.
Una recta secante común a dos rectas r y s diferentes determinan cuatro ángulos:



Los cuatro ángulos que están entre r y s (3,4,5 y 6) se denominan **ángulos internos**. Los otros cuatro (1, 2, 7 y 8) se denominan ángulos externos.

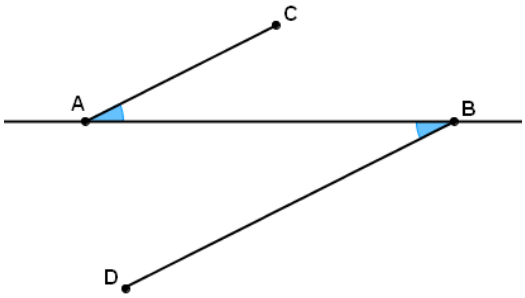
Los ángulos 3 y 5, que se sitúan en lados opuestos de la recta t se denominan **ángulos internos alternos**. Los ángulos 4 y 6 también son ángulos internos alternos.

Los ángulos 6 y 2, uno interno y otro externo y al mismo lado de la secante t, se denominan **ángulos correspondientes**. También son ángulos correspondientes 5 y 1, 8 y 4, 7 y 3.

Los ángulos 2 y 7, uno interno y el otro externo y en lados opuestos de la secante t se denominan **ángulos externos alternos**. También son ángulos externos alternos los ángulos 1 y 8.

3.6.2 Teorema. El teorema de los ángulos internos alternos (Elementos 1.27) (Alternate Interior Angle Theorem)

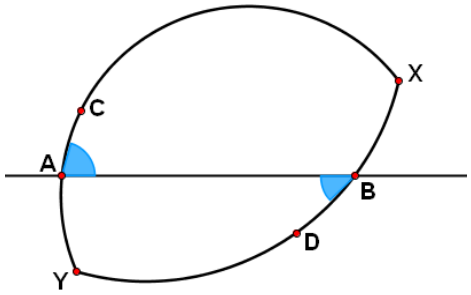
Sean C y D dos puntos opuestos de $\overleftrightarrow{AB}$. Si $\angle CAB \cong \angle ABD$ entonces $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{BD}$ son rectas paralelas.



Observación: Su recíproco es una condición euclídea, como se verá en 4.3.5.

Demostración.

Supongamos que $X \in \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{BD}$.



Podemos suponer que X es colateral con C. Luego X y D están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{AB}$.

Sea $Y \in \overrightarrow{BD}$ tal que $\overline{AX} \cong \overline{BY}$. Y es colateral con D, luego X e Y están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{AB}$. Por lo tanto, $Y * B * X$, y los ángulos $\angle XBA$ y $\angle ABY$ son suplementarios.

Además, aplicando SAS tenemos que $\Delta ABX \cong \Delta BAY$, y por tanto $\angle YAB \cong \angle XBA$, luego aplicando 2.3.4 tenemos que $\angle YAB$ y $\angle BAX$ son suplementarios y A, X, Y están alineados.

Por último, $C \in \overleftrightarrow{AB}$, lo que contradice la hipótesis del enunciado de que C está en un lateral de la recta $\overleftrightarrow{AB}$.

3.6.3 Corolario.

Si s_1 y s_2 son dos rectas perpendiculares a una misma recta r, entonces son paralelas.

Demostración. Sea $A = s_1 \cap r$ y $B = s_2 \cap r$. $A \neq B$, pues si $A = B$, por la unicidad de la proposición 2.5. 7, tendríamos que $s_1 = s_2$.

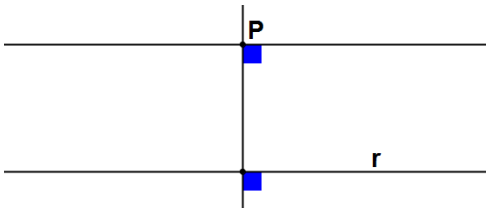
Sea C otro punto de la recta s_1 diferente de A, y sea D otro punto de la recta s_2 diferente de B (axioma I2).

Podemos tomar D tal que C y D estén en lados opuestos de $\overleftrightarrow{AB}$, pues si D y B están al mismo lado de $\overleftrightarrow{AB}$, tomamos un punto D' tal que D'*B*D (axioma B2).
$\angle BAC$ y $\angle DBA$ son rectos, luego son congruentes por 2.5.3 son congruentes, y ahora , por 2.6.3, s_1 y s_2 son dos rectas paralelas.

3.6.4 Proposición. Existencia y unicidad de la recta perpendicular.
Sea r una recta y P un punto $P \notin r$. Existirá una única recta s perpendicular a r que pasa por P.

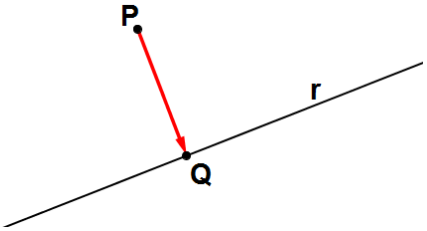
Demostración. La existencia fue demostrada en 2.5.5. Veamos ahora la unicidad. Supongamos que hay dos rectas s y s' que pasan por P y son perpendiculares a r. Sea $Q = s \cap r$ y $Q' = s' \cap r$. $Q \neq Q'$ pues $s \neq s'$. Ahora s y s' son dos rectas perpendiculares a una recta común r, luego $s \,//\, s'$ por 3.6.3, pero $P \in s \cap s'$, llegando a una contradicción.

3.6.5 Proposición. Existencia de una recta paralela. (Elementos 1.31)
Sea r una recta y P un punto $P \notin r$. Existirá al menos una recta paralela a r que pasa por P.



Demostración. Sea s la única recta perpendicular a r que pasa por P (3.5.5). Sea t la única recta perpendicular a s y que pasa por P (3.5.7). Las rectas t y r son ambas perpendiculares a la recta s, luego t y r son perpendiculares (3.6.3).

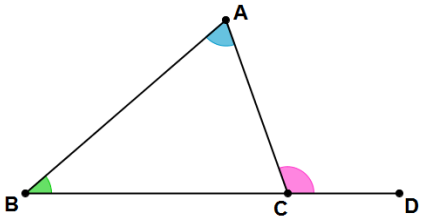
3.6.6 Definición. Proyección ortogonal de un punto en una recta.
Sea r una recta y $P \notin r$. Definimos la proyección ortogonal de P en r como el punto Q, intersección de r con la recta perpendicular a r que pasa por P.



3.7 Teorema del ángulo exterior.

3.7.1 Definición. Ángulo exterior.
Los ángulos internos de un triángulo son los tres ángulos que determinan los vértices con los lados. Un **ángulo exterior** de un triángulo es cualquier ángulo suplementario a uno de sus ángulos internos.

3.7.2 Teorema del ángulo exterior. "Exterior Angle Theorem" (Elementos 1.16)
Dado un triángulo ΔABC y un punto D tal que B*C*D, entonces el ángulo exterior $\angle ACD$ es mayor que los ángulos interiores opuestos $\angle A$ y $\angle B$.



Demostración.
a) $\angle ACD > \angle A$.
Supongamos que no es cierto, es decir, $\angle ACD \cong \angle A$ o $\angle ACD < \angle A$ (por tricotomía 2.4.7)
Si $\angle ACD \cong \angle A$, entonces $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ por el Teorema de los ángulos alternos, pero sabemos que $B = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD}$, llegando a contradicción.
Supongamos que $\angle ACD < \angle A$. Entonces existirá una semirrecta $\overrightarrow{AE}$ interior a $\angle A$ tal que $\angle ACD \cong \angle CAE$, y además, por el Teorema Crossbar, podemos escoger un E tal que B*E*C, es decir, $E \in \overleftrightarrow{CD}$. Observamos que D y E están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{AC}$ (pues B*E*C y B*C*D implica B*E*C*D y por tanto E*C*D) , y que $\angle DCA \cong < \angle CAE$. Luego, aplicando el Teorema de los ángulos alternos, deducimos que $\overleftrightarrow{CD} // \overleftrightarrow{AE}$. Pero $E \in \overleftrightarrow{CD} \cap \overleftrightarrow{AE}$, absurdo.

b) $\angle ACD > \angle A$.
Sea F un punto tal que A*C*F. Los ángulos $\angle ACD$ y $\angle BCF$ son ángulos opuestos por el vértice, luego $\angle ACD \cong \angle BCF$ (2.3.3).
Ahora podemos aplicar la primera parte de esta proposición al ángulo exterior $\angle BCF$ respecto del ángulo interior $\angle B$, por lo que $\angle B < \angle BCF \cong \angle ACD$.

3.7.3 Definición. Triángulo rectángulo. (Elementos 1 Definición 21)
Si ΔABC es un triángulo en el cual $\angle A$ es recto, diremos que se trata de un triángulo rectángulo, los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ se llaman catetos, y $\overline{BC}$ se llama hipotenusa.

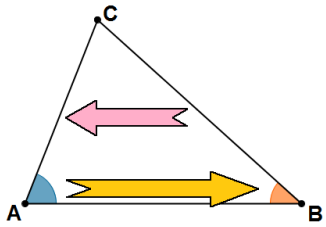
3.7.4 Definición. Ángulos agudos y obtusos. (Elementos 1 Definición 12)
Sea α un ángulo recto. Diremos que β es un ángulo agudo cuando $\beta < \alpha$, y diremos que β es un ángulo obtuso cuando $\beta > \alpha$.

3.7.5 Definición. Triángulos agudos y obtusos. (Elementos 1 Definición 11 y 21)
Un triángulo ΔABC será agudo cuando sus tres ángulos $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$ sean agudos, y será obtuso cuando tenga un ángulo obtuso.

3.7.6 Proposición.
Si ΔABC es un triángulo rectángulo con ángulo recto $\angle A$, entonces $\angle B$ y $\angle C$ son ángulos agudos.

Demostración. Sea ΔABC un triángulo rectángulo con ángulo recto. Sea D un punto tal que B*A*D. $\angle CAD$ será un ángulo exterior del triángulo con un ángulo suplementario $\angle A$ recto, luego $\angle CAD$ será recto, y aplicando el Teorema del ángulo exterior (2.7.2), $\angle CAD > \angle B$ y $\angle CAD > \angle C$.

3.7.7 Proposición. (Elementos 1.18 y 1.19)
En todo triángulo ΔABC, $\overline{BC} > \overline{AC} \Leftrightarrow \angle A > \angle B$.



Demostración. Veamos $\overline{BC} > \overline{AC} \Rightarrow \angle A > \angle B$:
Si $\overline{BC} > \overline{AC}$ entonces existirá un punto D tal que B*D*C y $\overline{CD} \cong \overline{AC}$.
Aplicando Crossbar Betweeneess (1.5.5) D estará en el interior de $\angle A$, por lo que $\angle CAD < \angle A$ (Proposición 2.4.3)
ΔADC es isósceles en C, luego $\angle CAD \cong \angle ADC$ (2.1.12) y por tanto $\angle ADC > \angle B$ por el Teorema del ángulo exterior en ΔABD.
Aplicando transitividad llegamos a $\angle B < \angle ADC = \angle CAD < \angle A$.

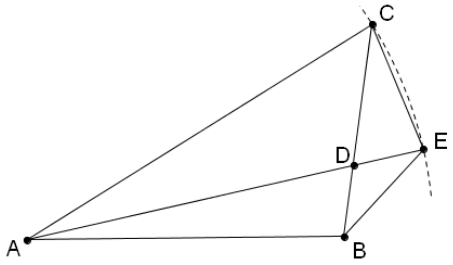
Veamos $\angle A > \angle B \Rightarrow \overline{BC} > \overline{AC}$.
Por tricotomía (2.4.7), $\overline{BC} \cong \overline{AC}$, o $\overline{BC} < \overline{AC}$ o $\overline{BC} > \overline{AC}$. Veamos que las dos primeras posibilidades nos llevan a contradicción:
Si $\overline{BC} \cong \overline{AC}$, entonces ΔABC será isósceles en C, luego $\angle A \cong \angle B$ contradiciendo la hipótesis.
Si $\overline{BC} < \overline{AC}$, podemos aplicar la primera parte de esta demostración, para deducir que entonces $\angle A < \angle B$, contradiciendo igualmente la hipótesis.

3.7.8 Lema.
Sea un triángulo ΔABC, y D un punto tal que B*D*C. Entonces si $\overline{AC} > \overline{AB}$ o $\overline{AC} \cong \overline{AB}$ entonces $\overline{AC} > \overline{AD}$.

Demostración. $\angle ADC > \angle B$ por el Teorema del ángulo exterior (2.7.1). Supongamos que $\overline{AC} > \overline{AB}$. Entonces $\angle B > \angle C$ (por 2.7.6), luego $\angle ADC > \angle B > \angle C$, y por tanto $\overline{AC} > \overline{AD}$ nuevamente por 2.7.6. Si $\overline{AC} \cong \overline{AB}$ entonces $\angle B \cong \angle C$ por 2.1.12, luego $\angle ADC > \angle B \cong \angle C$ y de nuevo concluimos que $\overline{AC} > \overline{AD}$.

3.7.9 Proposición. (Elementos 1.24 y 1.25)
Dados dos triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$, si se cumple $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ y $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, entonces $\angle BAC > \angle B'A'C' \Leftrightarrow \overline{BC} > \overline{B'C'}$.

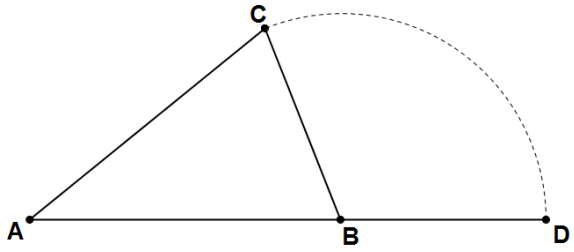
Demostración. Veamos en primer lugar $\angle BAC > \angle B'A'C' \Rightarrow \overline{BC} > \overline{B'C'}$.
Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\overline{AC} > \overline{AB}$ o $\overline{AC} \cong \overline{AB}$.
Puesto que $\angle BAC > \angle B'A'C'$, existirá una semirrecta $\overrightarrow{AD}$ con D en el interior de $\angle BAC$ tal que $\angle BAD \cong \angle B'A'C'$. Por Crossbar podemos suponer que $C*D*B$.
Aplicando el lema 2.7.8, tenemos que $\overline{AC} > \overline{AD}$. Luego existirá un punto E en $\overrightarrow{AD}$ tal que $A*D*E$ y $\overline{AC} \cong \overline{AE}$ (lema 2.7.7).



Los puntos B, C y E no pueden estar alineados: las rectas $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{BC}$ se cortan exclusivamente en D, pues de lo contrario serían la misma recta y entonces $A \in \overleftrightarrow{BC}$, absurdo. $E \in \overleftrightarrow{AD}$, y si $E \in \overleftrightarrow{BC}$ entonces $E = D$, contradiciendo $A*D*E$. Así pues, el triángulo ΔBCE está bien definido.
Puesto que $C*D*B$, el punto D está en el interior de $\angle CEB$ (Crossbar Betweenness), luego $\angle CED < \angle CEB$.
El triángulo ΔACE es isósceles en A, luego $\angle ACE = \angle AEC = \angle CED$, luego $\angle ACE < \angle CEB$.
Puesto que $A*D*E$, el punto D está en el interior de $\angle ACE$ (Crossbar Betweenness), luego $\angle ACE > \angle DCE$.
Por lo tanto, por transitividad, $\angle CEB > \angle ACE > \angle DCE = \angle BCE$. Luego $\overline{BC} > \overline{BE}$ por 2.7.6.
Ahora bien, $\Delta AEB \cong \Delta A'C'B'$ por SAS, por lo que $\overline{BE} \cong \overline{B'C'}$, y por tanto $\overline{BC} > \overline{B'C'}$ como queríamos ver.

Veamos ahora que $\overline{BC} > \overline{B'C'} \Rightarrow \angle A > \angle A'$. Supongamos lo contrario, es decir, que $\angle A \cong \angle A'$ o $\angle A < \angle A'$.
Si $\angle A \cong \angle A'$, entonces por SAS tenemos que $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$, pero entonces $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, contradiciendo la hipótesis.
Si $\angle A < \angle A'$, entonces podemos aplicar la primera parte de esta demostración para concluir que $\overline{BC} > \overline{B'C'}$, contradiciendo igualmente la hipótesis. Así pues, la única posibilidad válida es $\angle A > \angle A'$.

3.7.10 Proposición. Desigualdad triangular (primera versión).
Sea un triángulo ΔABC, y sea D un punto tal que $A*B*D$, y $\overline{BD} \cong \overline{BC}$. Entonces $\overline{AC} < \overline{AD}$.



Demostración. Puesto que $\overline{BD} \cong \overline{BC}$ entonces ΔCBD es isósceles y por tanto $\angle BCD \cong \angle BDC$. B está en el interior de $\angle ACD$ por el teorema CrossBar Betweenness. Por lo tanto $\angle ACD > \angle BCD \cong \angle BDC = \angle ADC$.
Y finalmente, aplicando 3.7.7, $\overline{AC} < \overline{AD}$.

3.7.11 Lema.
Sea un triángulo ΔABC, con $\angle A$ y $\angle C$ agudos. Trazamos desde B la perpendicular s a $\overleftrightarrow{AC}$. Sea F el punto de intersección entre s y $\overleftrightarrow{AC}$. Entonces A*F*C.

Demostración. $F \neq A$ y $F \neq B$ pues ambos ángulos no son rectos. Entonces por el axioma B3 necesariamente F*A*B, A*B*F o A*F*B.
Supongamos que F*A*B. Entonces $\angle A$ será un ángulo exterior a ΔFAB, luego $\angle BFA < \angle A$, pero $\angle BFA$ es recto y $\angle A$ es agudo, lo que nos lleva a contradicción.
De forma similar la hipótesis A*B*F tampoco es aceptable, luego A*F*B.

3.7.12 Lema.
Todo triángulo tiene al menos dos ángulos agudos.

Demostración. Sea un triángulo ΔABC, y supongamos que $\angle C$ no es agudo. Veamos que entonces $\angle A$ y $\angle B$ son agudos. Sea D un punto tal que B*C*D. Entonces $\angle ACD$ será agudo o recto pues es suplementario de un ángulo que no es agudo. Pero $\angle ACD$ es un ángulo exterior de ΔABC, luego por el Teorema del ángulo exterior (2.7.2) $\angle ACD > \angle A$ y $\angle ACD > \angle B$. Luego $\angle A$ y $\angle B$ son agudos.

3.8 Congruencia de triángulos.

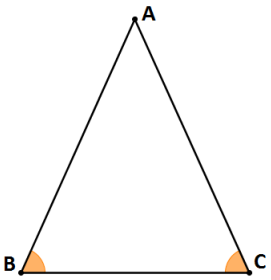
3.8.1 Proposición. Criterio AAS de congruencia de triángulos. (Elementos 1.26 parte 2) Dados dos triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$, si se cumple $\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$ y $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ entonces $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

Demostración. Por el axioma C6 existirá un único punto D, colateral con A respecto $\overleftrightarrow{BC}$, tal que $\Delta BCD \cong \Delta B'C'A'$. Puesto que $\angle DBC \cong \angle A'B'C' = \angle B' \cong \angle B$, por el axioma C5 tendremos que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA}$. Luego $D \in \overrightarrow{BA}$ y por tanto D*A*B o B*D*A o D=A.
Si D*A*B entonces $\angle CDB < \angle A$ por el Teorema del ángulo exterior, pero $\angle A \cong \angle A'$ y $\angle A' \cong \angle BDC$, llegando a contradicción. De la misma forma, suponer B*D*A también es contradictorio. Por lo tanto D=A y los dos triángulos son congruentes.

3.8.2 Proposición. Criterio ASA de congruencia de triángulos. (Elementos 1.26) Dados dos triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$, si se cumple $\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$ y $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ entonces $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

Demostración. Por el axioma C6, existirá un punto D tal que $\Delta ABD \cong \Delta A'B'C'$, con D y C colaterales respecto a la recta $\overleftrightarrow{AB}$. Puesto que
$\angle DAB \cong \angle C'A'B' = \angle A' \cong \angle A = \angle CAB$, por el axioma C5 tenemos que
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow D \in \overrightarrow{AC}$.
De la misma manera $\angle ABD \cong \angle A'B'C' = \angle B' \cong \angle B = \angle ABC$ implica
$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow D \in \overrightarrow{BC}$.
Así pues, $D \in \overrightarrow{BC} \cap \overrightarrow{AC}$, pero las rectas $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{AC}$ se cortan únicamente en C (pues A, B y C son puntos no colineales) luego $D = C$, y $\Delta ABC = \Delta ABD \cong \Delta A'B'C'$.

3.8.3 Teorema. Caracterización de los triángulos isósceles. (Elementos 1.6). Un triángulo ΔABC es isósceles en A, es decir $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, si y sólo si $\angle B = \angle C$.



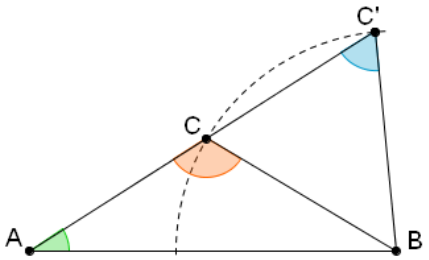
Demostración. Supongamos que el triángulo ΔABC cumple $\angle A \cong \angle B$. Basta aplicar el criterio SAS al triángulo ΔABC consigo mismo en la forma ΔBAC para deducir que $\overline{AC} \cong \overline{BC}$. De la misma forma se demuestra la segunda afirmación. El recíproco fue demostrado en 3.1.7.

3.8.4 Proposición. Criterio SSS de congruencia de triángulos. (Elementos 1.8) Dados dos triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$, si se cumple $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ y $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ entonces $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

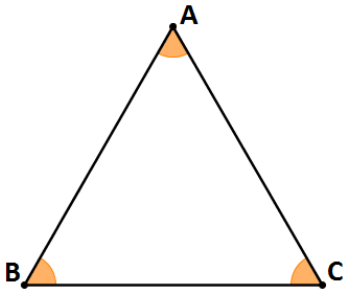
Demostración.
Puesto que $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, podemos aplicar 2.7.2, para demostrar que $\angle A \cong \angle A'$.
Efectivamente, si $\angle A > \angle A'$ entonces por 2.7.6 tenemos que $\overline{BC} > \overline{B'C'}$ contradiciendo la hipótesis $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, y de la misma manera, si $\angle A < \angle A' \Rightarrow \overline{BC} < \overline{B'C'}$ contradiciendo igualmente $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$.
Luego $\angle A \cong \angle A'$ y por tanto podemos aplicar ASA para deducir que $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

3.8.5 Ejercicio.
Dibuja un contraejemplo para ASS, de la siguiente manera: Dibuja dos triángulos ΔABC y $\Delta ABC'$ que difieren en un único vértice y haz que B, C y C' sean colineales. No tienes que justificar rigurosamente este contraejemplo, pero asegúrate de que quede claro en el esquema que es realmente un contraejemplo.

Demostración: En el siguiente esquema hemos representado dos triángulos ΔABC y $\Delta ABC'$ que cumplen $\angle CAB = \angle C'AB$, y tienen dos lados iguales. Sin embargo, difieren en el tercero: $\overline{AC} \neq \overline{AC'}$ y el resto de ángulos no es congruente: $\angle ACB \ncong \angle AC'B$ y $\angle ABC \ncong \angle ABC'$.



3.8.6 Teorema. El teorema del triángulo equilátero.
Un triángulo ΔABC es equilátero, es decir, tiene los tres lados iguales si y sólo si es equiangular, es decir, tiene los tres ángulos iguales.



Demostración.
Basta tener en cuenta que un triángulo equilátero es isósceles en cada uno de sus vértices y aplicar el teorema 3.8.3 dos veces: Si $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ entonces $\angle B = \angle C$, y si $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ entonces $\angle A = \angle C$, por lo que concluimos $\angle A = \angle B = \angle C$.

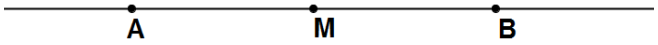
3.8.7 Teorema. Criterio HL de congruencia de triángulos rectángulos.
Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos rectángulos en A y A' respectivamente.
Entonces si $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ y $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, entonces serán congruentes.
En otras palabras, si dos triángulos rectángulos son congruentes cuando comparten la hipotenusa y uno de los catetos.

Demostración. Por C5 existirá un punto D, con C y D en lados opuestos de $\overleftrightarrow{AB}$, tal que $\Delta A'B'C' \cong \Delta ABD$.
Por 2.5.6 existen ángulos rectos. Por 2.5.3 todos los ángulos rectos son congruentes, por tanto, aplicando 2.3.4, deducimos que C, A y D están alineados.
La recta que pasa por C, A y D no puede contener B, pues A, B y C no están alineados, luego los puntos C, D y B forman un triángulo ΔCDB.
El triángulo ΔCDB es isósceles en B, pues $\overline{CB} \cong \overline{C'B'} \cong \overline{BD}$. Por lo tanto, $\angle DCB \cong \angle CDB$ (2.1.12)
Luego $\angle ACB = \angle DCB \cong \angle CDB = \angle ADB$, y aplicando el criterio AAS, llegamos a $\Delta ABD \cong \Delta ABC$, y por transitividad, $\Delta A'B'C' \cong \Delta ABD \cong \Delta ABC$.

3.9 Puntos medios, mediatrices, bisectrices, medianas y alturas.

3.9.1 Definición. Punto medio de un segmento.

El punto medio de un segmento $\overline{AB}$ es el punto M tal que A*M*B y $\overline{AM} \cong \overline{MB}$.



3.9.2 Lema.

Si un segmento tiene punto medio, entonces es único.

Demostración. Sea $\overline{AB}$ un segmento y M y M' dos puntos medios, es decir A*M*B, A*M'*B, $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ y $\overline{AM'} \cong \overline{M'B}$.

$A*M*B \wedge A*M'*B \Rightarrow A*M*M'*B \vee A*M'*M*B$

Supongamos $A*M*M'*B$. Entonces $A*M*M'*B \Rightarrow M*M'*B \Rightarrow \overline{M'B} < \overline{MB}$.

Pero también $A*M*M'*B \Rightarrow A*M*M' \Rightarrow \overline{AM} < \overline{AM'}$

Luego $\overline{AM} < \overline{AM'} \cong \overline{M'B} < \overline{MB}$ contradiciendo la hipótesis $\overline{AM} \cong \overline{MB}$.

De la misma forma si $A*M'*M*B$.

3.9.3 Lema.

Supongamos que $\overline{AB}$ es un segmento y que C y D son puntos en lados opuestos de $\overleftrightarrow{AB}$, y que $\angle BAC$ y $\angle ABD$ son rectos. Entonces $\overline{CD}$ no puede contener A o B.

Demostración. Si $A \in \overline{CD}$ entonces A, C, D son colineales. Luego $D \in \overleftrightarrow{AC}$. Por el teorema de los ángulos alternos, $\overleftrightarrow{AC} // \overleftrightarrow{BD}$, pero ambas rectas se cortan en D, llegando a contradicción.

De la misma manera llegamos a contradicción si suponemos $B \in \overline{CD}$.

3.9.4 Lema.

Sea $\overline{AB}$ un segmento y C y D puntos en lados opuestos de $\overleftrightarrow{AB}$, con $\angle BAC$ y $\angle ABD$ ángulos rectos. Entonces $\overline{CD}$ corta $\overleftrightarrow{AB}$ en un punto M tal que A*M*B.

Demostración. Puesto que C y D están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{AB}$, el segmento $\overline{CD}$ y la recta $\overleftrightarrow{AB}$ se deben cortar en un punto M, luego C*M*D.

Por el lema anterior 3.9.3, $M \neq A, B$. Luego por el axioma B3, tenemos tres posibilidades: M*A*B, A*M*B o A*B*M.

Supongamos que M*A*B.

Entonces $\angle MAC$ es recto (Pues es suplementario de $\angle BAC$ que es un ángulo recto).

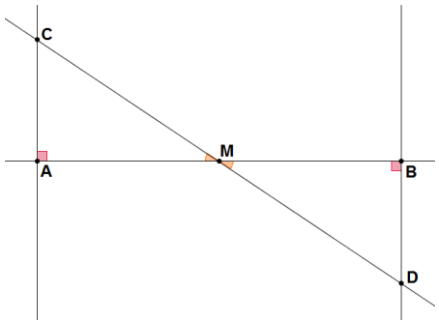
Luego $\angle AMC$ tiene que ser agudo.

Pero por otro lado, $\angle AMC$ es un ángulo exterior del triángulo ΔMBD (pues C*M*D), por lo tanto $\angle AMC > \angle MBD \cong \angle ABD$ recto, luego $\angle AMC$ tiene que ser obtuso, y por lo tanto no puede ser agudo, llegando a contradicción.

De la misma forma llegamos a contradicción suponiendo A*B*M, luego A*M*B es la única posibilidad válida.

3.9.5 Proposición. Existencia del punto medio. (Elementos 1.10)
Todo segmento tiene un único punto medio.

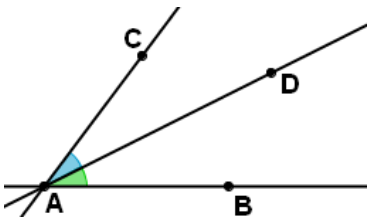
Demostración. Sea $\overline{AB}$ un segmento.
Sea $\overleftrightarrow{AC}$ una recta perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ pasando por A.
Entonces $\angle BAC$ es un ángulo recto, por definición.
Sea D un punto tal que D y C están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{AB}$, y $\angle ABD \cong \angle BAC$ recto. (axioma C5).
Por el axioma C2 podemos escoger un D tal que $\overline{BD} \cong \overline{AC}$.
Por el lema anterior, el segmento $\overline{CD}$ cortará la recta $\overleftrightarrow{AB}$ en un punto M cumpliendo A*M*B.



Por el teorema de los ángulos opuestos por el vértice (3.3.3), $\angle AMC \cong \angle DMB$.
$\angle MAC = \angle BAC$ ángulo recto.
$\angle DBM = \angle ABD$ ángulo recto.
Y puesto que $\overline{BD} \cong \overline{AC}$, podemos aplicar el criterio AAS para garantizar que los triángulos ΔCAM y ΔDBM son congruentes, por lo que $\overline{AM} \cong \overline{MB}$, es decir, M es el punto medio del segmento $\overline{AB}$.
La unicidad del punto medio quedó demostrada en el lema 3.9.2.

Observación. Esta demostración es diferente a la que aparece en Elementos 1.10, pues en ésta no utilizamos la hipótesis de la existencia de triángulos equiláteros.

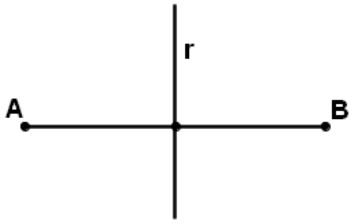
3.9.6 Definición. Bisectriz. ("Angle bisector")
Sea un ángulo $\angle BAC$. Una bisectriz de $\angle BAC$ es una semirrecta $\overrightarrow{AD}$ tal que $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$ y $\angle BAD \cong \angle DAC$.



3.9.7 Proposición. (Elementos 1.9)
Todo ángulo tiene una única bisectriz.

Demostración. Existencia: Sea el ángulo $\angle BAC$. Modificando los puntos C y B podemos suponer que $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, es decir, que el triángulo ABC es isósceles en A. Sea D el punto medio de $\overline{BC}$ (Proposición 2.9.5).
D es un punto interior de $\angle BAC$ (1.7.3)
Por el criterio SSS de congruencia, $\Delta ABD \cong \Delta ACD$, por lo que $\angle BAD \cong \angle DAC$, es decir, la semirrecta $\overrightarrow{AD}$ es el bisector del ángulo.
Unicidad:
Supongamos que $\overrightarrow{AD'}$ es otra semirrecta bisector de $\angle BAC$.
Por el teorema Crossbar, $\overrightarrow{AD'}$ cortará $\overline{BC}$. Sustituyendo D' por este punto, podemos suponer que B*D'*C. Luego D' es el punto medio de $\overline{BC}$ (aplicando el criterio SAS de congruencia de triángulos, y escogiendo puntos B y C tales que $\overline{AB} \cong \overline{AC}$). Pero D también es el punto medio de $\overline{BC}$, luego por la unicidad del punto medio, llegamos a $D' = D$.

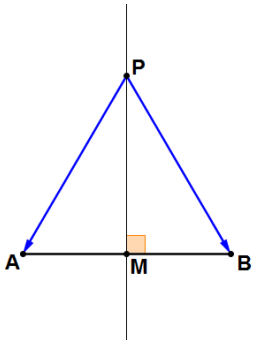
3.9.8 Definición. Mediatriz de un segmento ("Perpendicular bisector").
Sea un segmento $\overline{AB}$. Una mediatriz de $\overline{AB}$ es una recta r tal que es perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ y pasa por su punto medio.



3.9.9 Proposición.
Todo segmento tiene una única mediatriz.

Demostración. Sea un segmento $\overline{AB}$.
Por 2.9.5 existirá un único punto medio M.
Por 2.5.7 existirá una única recta s perpendicular a r que pasa por M.
La recta s es la recta buscada.

3.9.10 Teorema. Caracterización de los puntos de una mediatriz.
Un punto pertenece a la mediatriz de un segmento $\overline{AB}$ si y sólo si es equidistante a los extremos A y B de dicho segmento.



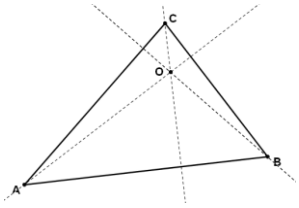
Demostración. Sea un segmento $\overline{AB}$ y r su mediatriz, donde M es el punto medio del segmento $\overline{AB}$. Sea $P \in r$.

Si P=M, entonces por definición de punto medio tenemos que $\overline{AM} \cong \overline{MB}$.
Si $P \neq M$, entonces los triángulos ΔAMP y ΔBMP serán congruentes por SAS, luego $\overline{AP} \cong \overline{PB}$.
Recíprocamente, sea P un punto tal que $\overline{AP} \cong \overline{PB}$.
El triángulo ΔABP será isósceles, luego $\angle PAB \cong \angle ABP$.
Sea s la recta perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ que pasa por P. Aplicando AAS, los triángulos $\Delta AM'P$ y $\Delta BM'P$ serán congruentes, luego $\overline{AM'} \cong \overline{M'B}$, y por la unicidad del punto medio de $\overline{AB}$, tenemos que M'=M, y por la unicidad de la recta perpendicular que pasa por un punto, $P' \in r$.

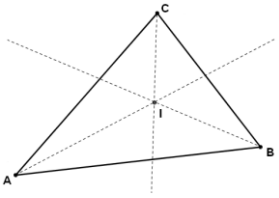
3.10 Rectas y puntos notables del triángulo (1).

3.10.1 Definición. Rectas notables del triángulo.

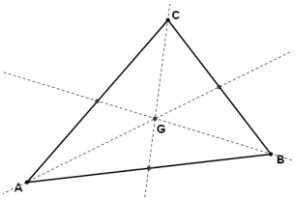
Alturas de un triángulo. ("Altitudes")
Las alturas son las rectas que pasan por un vértice y son perpendiculares al lado contrario.



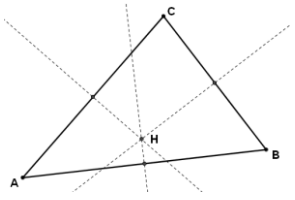
Bisectrices de un triángulo. ("Internal Bisectors")
Las bisectrices de un triángulo son las rectas que biseccionan los ángulos correspondientes a los tres vértices, es decir, dividen los ángulos en dos iguales.



Medianas de un triángulo. ("Medians")
Las medianas son las rectas que pasan por cada vértice y el punto medio del lado opuesto.



Mediatrices de un triángulo. ("Perpendicular bisectors")
Las mediatrices son las rectas que son perpendiculares a cada lado y pasan por su punto medio.



En el próximo apartado veremos que las mediatrices se encuentran en un único punto llamado **circuncentro**.

Más adelante se demostrará que en un plano euclídeo:

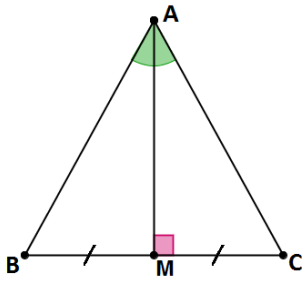
Las alturas se encuentran en un único punto llamado **ortocentro**.
Las bisectrices se encuentran en un único punto llamado **incentro**.
Las medianas se encuentran en un punto único llamado **baricentro.**

3.10.2 Proposición.
Las tres mediatrices de un triángulo se encuentran en un único punto llamado **circuncentro**.

Demostración. Sea un triángulo ΔABC. Trazamos la mediatriz del lado $\overline{AB}$ y del lado $\overline{AC}$. Estas dos rectas no pueden ser paralelas por (????). Sea O su punto de corte.
Para demostrar que O también pertenece a la mediatriz asociada al lado $\overline{BC}$, utilizaremos repetidamente la caracterización de 3.9.10:
$\left|\overline{BO}\right| = \left|\overline{OA}\right|$ por estar O en la mediatriz del lado $\overline{AB}$.
$\left|\overline{CO}\right| = \left|\overline{OA}\right|$ por estar O en la mediatriz del lado $\overline{AC}$.
Luego $\left|\overline{BO}\right| = \left|\overline{OA}\right| = \left|\overline{CO}\right| \Rightarrow \left|\overline{BO}\right| = \left|\overline{CO}\right|$ y por tanto O pertenece a la mediatriz asociada al lado $\overline{BC}$.

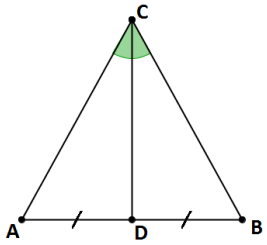
3.10.3 Corolario.
El circuncentro de un triángulo equidista de los tres vértices, por lo que será el centro de la circunferencia circunscrita, aquella que pasa por los tres vértices al mismo tiempo.

3.10.4 Proposición.
Sea ΔABC un triángulo isósceles en A (es decir, $\overline{AB} \cong \overline{AC}$). Entonces coinciden:
i) la mediana por el vértice A.
ii) la mediatriz del triángulo por el vértice A.
iii) la bisectriz del ángulo $\angle A$.
iv) la altura del triángulo por el vértice A.

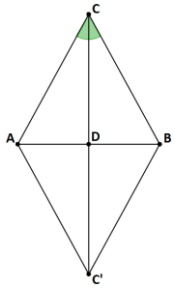


Demostración. Sea M el punto medio de $\overline{BC}$, es decir, el segmento $\overline{AM}$ es la mediana por el vértice A.
$\overline{BM} \cong \overline{MC}$, $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ y $\angle B \cong \angle C$, luego $\Delta ABM \cong \Delta ACM$ (criterio SAS).
Por lo tanto $\angle BMA \cong \angle CMA$, es decir, son ángulos suplementarios congruentes y por tanto rectos. Así pues, $\overline{AM}$ es la mediatriz del segmento $\overline{BC}$. Puesto que pasa por A, está claro que $\overline{AM}$ es la altura del triángulo por el vértice A.
También se cumple $\angle BAM \cong \angle CAM$, por lo que $\overline{AM}$ es la bisectriz del ángulo $\angle A$.

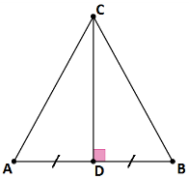
3.10.5 Proposición.
Si en un triángulo coinciden la mediana y la bisectriz en un vértice, entonces el triángulo es isósceles en dicho vértice.



Demostración. Sea ΔABC un triángulo y D un punto de $\overline{AB}$ tal que $\overline{AD} \cong \overline{DB}$ y $\angle ACD \cong \angle DCB$. Prolongamos el segmento $\overline{CD}$ hasta un punto C' tal que $\overline{CD} \cong \overline{DC'}$. Los triángulos ΔACD y $\Delta BC'D$ serán congruentes por el criterio SAS, puesto que $\overline{AD} \cong \overline{DB}$, $\overline{CD} \cong \overline{DC'}$ y $\angle ADC \cong \angle BDC'$ por ser ángulos opuestos por el vértice. Luego $\overline{AC} \cong \overline{BC'}$ y $\angle BC'D \cong \angle ACD$. Pero entonces $\angle BC'D \cong \angle ACD \cong \angle DCB$ y por lo tanto el triángulo $\Delta CBC'$ es isósceles en B (2.8.3). Luego $\overline{BC} \cong \overline{BC'}$ y por lo tanto $\overline{AC} \cong \overline{BC'} \cong \overline{BC}$, así pues, el triángulo ΔABC será isósceles en C.



3.10.6 Proposición.
Si en un triángulo coinciden la altura y la mediana en un vértice, entonces el triángulo es isósceles en dicho vértice.



Demostración:
Los triángulos ΔADC y ΔBDC serán congruentes por el criterio SAS, y por tanto $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, es decir, es un triángulo isósceles.

3.10.7 Proposición.
Si dos triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ son isósceles en A y A' respectivamente, y son congruentes, también lo serán sus alturas respectivas por A y A'.

Demostración.
Trazamos las respectivas alturas $\overline{AD}$ y $\overline{A'D'}$.
Por 3.10.4 dichas alturas también son bisectrices de $\angle A$ y $\angle A'$, luego $\angle DAC \cong \angle D'A'C'$. Por ser triángulos isósceles $\angle C \cong \angle C'$, y aplicando el criterio ASA, $\Delta ADC \cong \Delta A'D'C'$, de lo que deducimos que $\overline{AD} \cong \overline{A'D'}$, tal y como queríamos ver.

3.11 Congruencia de cuadriláteros.

3.11.1 Definición. Congruencia de cuadriláteros.

Diremos que dos cuadriláteros $\Diamond ABCD$ y $\Diamond A'B'C'D'$ son congruentes cuando podamos establecer una biyección entre sus vértices

$$A \leftrightarrow A',\ B \leftrightarrow B',\ C \leftrightarrow C',\ D \leftrightarrow D'$$

que haga corresponder ángulos y segmentos congruentes:

$$\angle A \cong \angle A',\ \angle B \cong \angle B',\ \angle C \cong \angle C',\ \angle D \cong \angle D' \text{ y}$$
$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'},\ \overline{BC} \cong \overline{B'C'},\ \overline{CD} \cong \overline{C'D'},\ \text{y}\ \overline{DA} \cong \overline{D'A'}.$$

3.11.2 Proposición. Criterio SASAS de congruencia de cuadriláteros.

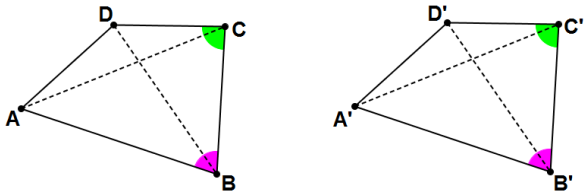
Si dos cuadriláteros $\Diamond ABCD$ y $\Diamond A'B'C'D'$ cumplen

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'},\ \angle B \cong \angle B',\ \overline{BC} \cong \overline{B'C'},\ \angle C \cong \angle C' \text{ y } \overline{CD} \cong \overline{C'D'}$$

entonces son congruentes.

Demostración.

Trazamos las diagonales respectivas $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ y $\overline{A'C'}$, $\overline{B'D'}$ de cada cuadrilátero:



Puesto que $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\angle B \cong \angle B'$, $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, los triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ son congruentes por el criterio SAS.

Luego $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, $\angle CAB \cong \angle C'A'B'$ y $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$.

De la misma manera, puesto que $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, $\angle C \cong \angle C'$ y $\overline{CD} \cong \overline{C'D'}$, los triángulos ΔBCD y $\Delta B'C'D'$ son congruentes por el criterio SAS.

Luego $\overline{BD} \cong \overline{B'D'}$, $\angle DBC \cong \angle D'B'C'$ y $\angle BDC \cong \angle B'D'C'$

Por resta de ángulos (3.3.7), si $\angle C \cong \angle C'$ y $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$,entonces $\angle DCA \cong \angle D'C'A'$, y puesto que $\overline{CD} \cong \overline{C'D'}$ y $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, por el criterio SAS tenemos que $\Delta DCA \cong \Delta D'C'A'$, y por lo tanto $\overline{AD} \cong \overline{A'D'}$, $\angle D \cong \angle D'$ y $\angle DAC \cong \angle D'A'C'$.

Por suma de ángulos (3.3.5), $\angle DAC \cong \angle D'A'C'$ y $\angle CAB \cong \angle C'A'B'$ implica $\angle A \cong \angle A'$ y ya tenemos todos los ángulos y todos los lados congruentes, tal y como queríamos ver.

3.11.3 Ejercicio. Otros criterios de congruencia de cuadriláteros.

Los criterios ASASA, SASSS y SASAA son criterios válidos de congruencia de cuadriláteros.

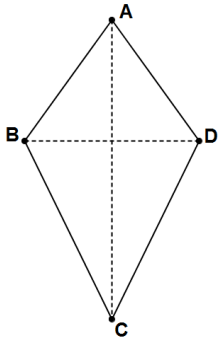
3.11.4 Ejercicio.

Comprueba, mediante un antiejemplo en IR^2, que el criterio SAAAA no es un criterio válido de congruencia de cuadriláteros.

3.12 Cometas.

3.12.1 Definición. Cometa. (“kite”)

Una cometa es un cuadrilátero regular $\Diamond ABCD$ que tiene dos pares de lados adyacentes congruentes: $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ y $\overline{BC} \cong \overline{CD}$.



También lo podemos interpretar como una figura creada mediante dos triángulos isósceles con una base común (base que será la diagonal de la cometa).

3.12.2 Teorema.

Sea $\Diamond ABCD$ una cometa ($\overline{AB} \cong \overline{AD}$ y $\overline{BC} \cong \overline{CD}$). Entonces $\overleftrightarrow{AC}$ es la mediatriz del segmento diagonal $\overline{BD}$, y la bisectriz del ángulo $\angle BAD$.

Demostración. A y C equidistan de B y D, luego aplicando 3.9.10, ambos pertenecen a la mediatriz de $\overline{BD}$. Y puesto que son diferentes, la mediatriz de $\overline{BD}$ será $\overleftrightarrow{AC}$.
Es bisectriz del ángulo $\angle BAD$ porque $\overleftrightarrow{AC}$ es mediatriz del triángulo isósceles ΔABD y en un triángulo isósceles coinciden mediatriz y bisectriz (3.10.4).

3.12.3 Proposición.

Las diagonales de una cometa se cortan en ángulos rectos.

Demostración.
Siguiendo con la notación de los apartados anteriores, la diagonal $\overline{AC}$ es la mediatriz de la diagonal $\overline{BD}$, luego cortan en ángulo recto.

4 Medición.

> Es posible medir el progreso de las ciencias naturales, o de una rama de la ciencia natural, en función del grado en el que el número ha sido introducido. Sin embargo, si la ciencia no quiere caer presa de un formalismo estéril (*unfruchtbarer Formalismus*), entonces deberá reflexionar sobre sí misma en una fase posterior de su desarrollo y, por lo menos, examinar cómo se ha logrado la introducción del número.
> Hilbert, 1898.

4.1 Conjuntos convexos.

4.1.1 Definición. Conjunto convexo.
Diremos que un conjunto S de puntos es convexo cuando cumple la siguiente condición:

Si $A,B \in S$ entonces $\overline{AB} \subset S$

O equivalentemente: Si $A*C*B$ con $A,B \in S$, entonces $C \in S$.
Observación. El conjunto vacío es convexo.

4.1.2 Ejercicio.
Si S es un conjunto de un único punto, entonces es convexo.

Demostración. Basta aplicar la definición de $\overline{AA}$ (1.2.5).

4.1.3 Ejercicio.
Toda recta es convexa.

Demostración. Si $A,B \in r \Rightarrow \overline{AB} \subset \overleftrightarrow{AB} = r$ (1.2.11).

4.1.4 Ejercicio.
Toda semirrecta es convexa.

Demostración. Si $A,B \in \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overline{AB} \subset \overrightarrow{AB} \subset \overrightarrow{CD}$, por 1.2.11 y 1.4.23.

4.1.5 Ejercicio.
Todo semiplano es convexo.

Demostración. Sea r una recta y supongamos que A y B están en el mismo lado de r, es decir, $A \approx_r B$. Sea C un punto tal que A*C*B. Supongamos que $A \not\approx_r C$. Entonces existe un punto $D \in r$ tal que A*D*C. Entonces A*D*C*B (1.4.4), luego A*D*B y en consecuencia $A \not\approx_r B$ en contradicción con la hipótesis. Luego $A \approx_r C$.

4.1.6 Ejercicio.
Todo segmento es convexo.

4.1.7 Proposición.
La intersección de dos conjuntos convexos es convexo.

Demostración. Supongamos S y T dos conjuntos convexos. Sean $A, B \in S \cap T$. Entonces $A, B \in S$ convexo, luego $\overline{AB} \subset S$. De la misma forma $A, B \in T$ convexo, y por tanto $\overline{AB} \subset T$. Luego $\overline{AB} \subset S \cap T$.

4.2 Particiones de Dedekind. Puntos de corte. Axioma de Dedekind.

Nota histórica.
A mediados del siglo XIX el matemático alemán Dedekind intruduce el concepto de "corte", que aclara y unifica por un lado el concepto geométrico de recta contínua, en el sentido de completa, sin agujeros y por otro el concepto aritmético de "sistema numérico contínuo", ambos en perfecta biyección. Gracias a este concepto, muchos teoremas fundamentales que hasta el momento se tenían por ciertos pudieron ser finalmente demostrados rigurosamente.

Leemos en una traducción al inglés de su libro **Essays on the Theory of Numbers**: "The theory of irrational numbers there presented, wrought out in the fall of 1853, is based on the phenomenon occurring in the domain of rational numbers which I designate by the term cut ("Schnitt") and which I was the first to investigate carefully ; it culminates in the proof of the continuity of the new domain of real numbers"

4.2.1 Definición. Partición de una recta.
Una **Partición** de una recta r es un par de conjuntos $\{\Sigma_1, \Sigma_2\}$ de puntos de r tal que

$$\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = r \ , \Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \varnothing \ , \Sigma_1 \neq \varnothing \ , \Sigma_2 \neq \varnothing$$

4.2.2 Definición. Partición de Dedekind de una recta.
Una **Partición de Dedekind** de una recta r es una partición $\{\Sigma_1, \Sigma_2\}$ de r tal que ningún punto de Σ_1 está entre dos puntos de Σ_2 y viceversa.

4.2.3 Proposición.
Una partición $\{\Sigma_1, \Sigma_2\}$ de una recta r es de Dedekind si y sólo si Σ_1 y Σ_2 son convexos.

Demostración.
Supongamos que $\{\Sigma_1, \Sigma_2\}$ es una partición de Dedekind de una recta r. Sean $P, Q \in \Sigma_1$. Sea $R \in \overline{PQ}$, es decir, $P * R * Q$. Puesto que ningún punto de Σ_2 puede estar entre dos puntos de Σ_1, necesariamente $R \in \Sigma_1$, es decir, $\overline{PQ} \in \Sigma_1$, y por lo tanto es convexo.
Igualmente se demuestra que Σ_2 es convexo.
Supongamos ahora que Σ_1 y Σ_2 son conjuntos convexos.
Supongamos que $R \in \Sigma_1$ está entre dos puntos $P, Q \in \Sigma_2$, es decir, $P * R * Q$.
Por convexidad de Σ_2 necesariamente $R \in \Sigma_2$, contradiciendo la hipótesis. Luego ningún punto de Σ_1 puede estar entre dos puntos de Σ_2. Para el otro conjunto el razonamiento es idéntico.

4.2.4 Definición. Punto de corte de una partición de Dedekind.
Un punto de corte de una partición de Dedekind $\{\Sigma_1, \Sigma_2\}$ de una recta r es un punto $O \in r$ tal que

$$\forall P, Q \in r \ , P * O * Q \Rightarrow \overline{PQ} \text{ corta } \Sigma_1 \text{ y } \Sigma_2$$

Por decirlo de alguna manera visual, un punto de corte es un punto que está en el borde de la partición. Pertenece a una de las dos partes y "roza" la otra.

4.2.5 Proposición. Una segunda definición equivalente de punto de corte.
Un punto O es un punto de corte de una partición de Dedekind $\{\Sigma_1, \Sigma_2\}$ de una recta r si y sólo si no puede estar entre dos puntos de Σ_1 ni entre dos puntos de Σ_2.

Demostración.
$\Rightarrow$Supongamos que O es un punto de corte de una partición de Dedekind $\{\Sigma_1, \Sigma_2\}$ de una recta r, y supongamos que $P*O*Q$ para ciertos $P, Q \in \Sigma_1$. Por convexidad de Σ_1, $P, Q \in \Sigma_1 \Rightarrow \overline{PQ} \subset \Sigma_1$, contradiciendo la hipótesis de que $\overline{PQ}$ corta Σ_2.
De la misma forma se demuestra que O no puede estar entre dos puntos de Σ_2.
$\Leftarrow$Sean $P, Q \in r$, $P*O*Q$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $O \in \Sigma_1$.
Por hipótesis ambos puntos P y Q no pueden pertenecer al mismo Σ, supongamos que $P \in \Sigma_1$ y $Q \in \Sigma_2$. Entonces $P, O \in \overline{PQ} \cap \Sigma_1$ y $Q \in \overline{PQ} \cap \Sigma_2$.
El caso $P \in \Sigma_2$ y $Q \in \Sigma_1$ se demuestra de forma similar.

4.2.6 Proposición. Una tercera definición equivalente de punto de corte.
Un punto de corte $O \in r$ de una partición de Dedekind $\{\Sigma_1, \Sigma_2\}$ de una recta r, es un punto tal que

$$\forall P \in \Sigma_1, \forall Q \in \Sigma_2, P, Q \neq O \Rightarrow P*O*Q$$

Demostración.
$\Rightarrow$Sean $P \in \Sigma_1$, $Q \in \Sigma_2$, $P, Q \neq O$. Los puntos P, Q y O son tres puntos distintos de la recta, luego se debe dar uno y sólo uno de los tres casos siguientes: (Axioma B3)
a) $P*Q*O$ b) $O*P*Q$ c) $P*O*Q$
Supongamos que sucede el caso a), es decir, $P*Q*O$. Sea R tal que $Q*O*R$ (Axioma B2).
$P*Q*O \wedge Q*O*R \Rightarrow P*Q*O*R \Rightarrow P*Q*R$ (2.3.6)
Por hipótesis, $Q*O*R \Rightarrow \exists S \in \overline{QR} \cap \Sigma_1 \Rightarrow Q*S*R$.
Pero $P*Q*R \wedge Q*S*R \Rightarrow P*Q*S*R \Rightarrow P*Q*S$, con $P, S \in \Sigma_1$, luego por convexidad necesariamente $Q \in \Sigma_1$ contradiciendo la hipótesis $Q \in \Sigma_2$.

El caso b) nos lleva a contradicción con un razonamiento similar, por lo que sólo puede suceder el caso c), es decir, que $P*O*Q$.

$\Leftarrow$Sea $O \in r$ un punto que cumple la condición anterior.
Supongamos que $A*O*B$ para ciertos $A, B \in r$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $O \in \Sigma_1$.
Está claro que entonces no se puede dar $A, B \in \Sigma_2$, pues $\{\Sigma_1, \Sigma_2\}$ es una partición de Dedekind.
Veamos que tampoco se puede dar el caso $A, B \in \Sigma_1$. En efecto, supongamos que $A*O*B$ para ciertos $A, B \in \Sigma_1$. Puesto que $\Sigma_2 \neq \varnothing$, sea $C \in \Sigma_2$.
Luego, aplicando la hipótesis, tendremos que $B*O*C$ y $A*O*C$.
Luego aplicando 2.3.8, puede ocurrir $A*B*O*C$ o $B*A*O*C$. Pero $A*B*O*C \Rightarrow A*B*O$ y $B*A*O*C \Rightarrow B*A*O$, y ambas posibilidades contradicen la hipótesis $A*O*B$.

4.2.7 Corolario.
Un punto de corte, si existe, es único.

Demostración.
Supongamos que O y O' son puntos de corte de una misma partición de Dedekind $\{\Sigma_1, \Sigma_2\}$ de una recta r.
Supongamos que $O, O' \in \Sigma_1$. Sea $P \in \Sigma_2$. Aplicamos la proposición anterior:
Por ser O' punto de corte, $O * O' * P$, por ser O punto de corte, $O' * O * P$, contradiciendo el Axioma B3.
Supongamos que $O \in \Sigma_1$ y $O' \in \Sigma_2$. Sea P un punto $O * P * O'$ (Axioma B2).
Si $P \in \Sigma_1$, puesto que $O' \in \Sigma_2$, por ser O punto de corte y aplicando la proposición anterior obligatoriamente se debe cumplir $P * O * O'$, llegando a contradicción.
Si $P \in \Sigma_2$ un razonamiento similar nos lleva igualmente a contradicción.
El resto de casos se demuestra de la misma manera.

4.2.8 Axioma. Axioma de Dedekind.
Toda cortadura de Dedekind de una recta contiene un punto de corte.
Este axioma fue propuesto por J.W.R. **Dedekind** en 1871.

4.2.9 Definición. Plano neutral (o absoluto).
Un plano neutral será un plano métrico que cumple además el axioma de Dedekind. Existe otro nombre para esta geometría, propuesto por J. Bolyai, "**geometría absoluta**" (*absolute geometry*). En este libro utilizaremos la propuesta por W.Prenowitz y M.Jordan (1965), "**geometría neutral**" (*neutral geometry*), remarcando que esta geometría se mantiene "neutral" respecto del último axioma, el de paralelismo. [Mar, 102]

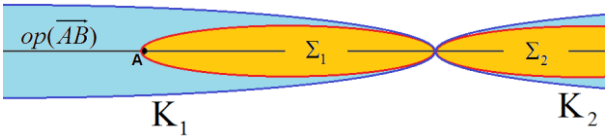
4.2.10 Teorema. Postulado de Dedekind para semirrectas.
Del axioma de Dedekind para rectas podemos obtener una versión similar para particiones de Dedekind de semirrectas:

Sea una semirrecta $s = \overrightarrow{AB}$. Diremos partición de Dedekind de s a todo par de conjuntos $\{\Sigma_1, \Sigma_2\}$ tal que

a) $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = s$
b) $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \varnothing$
c) $A \in \Sigma_1$
d) $\Sigma_1 \neq s$
e) Σ_1, Σ_2 son convexos.

Ampliamos la partición $\{\Sigma_1, \Sigma_2\}$ a una partición $\{K_1, K_2\}$ de la recta $r = \overleftrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cup op(\overrightarrow{AB}) = s \cup op(\overrightarrow{AB})$ de la siguiente manera:

$$K_1 = \Sigma_1 \cup op(\overrightarrow{AB})$$
$$K_2 = r - K_1$$



Observamos que $K_2 = \Sigma_2$:

$P \in K_2 \Rightarrow P \notin K_1 = \Sigma_1 \cup op(\overrightarrow{AB}) \Rightarrow P \notin op(\overrightarrow{AB}) \Rightarrow P \in \overrightarrow{AB}, P \notin \Sigma_1 \Rightarrow P \notin \Sigma_2$

$P \in \Sigma_2 \Rightarrow P \notin \Sigma_1 \wedge P \neq A \in \Sigma_1 \Rightarrow P \in \overrightarrow{AB} - A \Rightarrow P \notin op(\overrightarrow{AB}) \Rightarrow P \notin K_1 \Rightarrow P \in K_1$

$\{K_1, K_2\}$ es una partición de Dedekind de la recta r:

$K_1 \neq \varnothing$ pues $A \in \Sigma_1 \subset K_1$.

$K_2 \neq \varnothing$ pues $\Sigma_2 \neq \varnothing$.

$K_1 \cup K_2 = r$ $K_1 \cap K_2 = \varnothing$ por ser conjuntos complementarios.

K_1 es convexo: Supongamos que $P, Q \in K_1$ y $P * R * Q$ para cierto $R \in r$.

Si $P, Q \in op(\overrightarrow{AB}) \Rightarrow R \in op(\overrightarrow{AB}) \subset K_1$ pues el opuesto de una semirrecta es una semirrecta y toda semirrecta es convexa (4.1.4).

Si $P, Q \in \Sigma_1 \Rightarrow R \in \Sigma_1 \subset K_1$ pues por hipótesis Σ_1 es convexo.

Si $P \in op(\overrightarrow{AB})$ y $Q \in \Sigma_1$, y ninguno de los dos es A.

$P \in op(\overrightarrow{AB}) = op(\overrightarrow{AQ}) \Rightarrow P * A * Q$

$P * A * Q \wedge P * R * Q \Rightarrow P * A * R * Q \vee P * R * A * Q$

$P * R * A * Q \Rightarrow R * A * Q \Rightarrow R \in op(\overrightarrow{AQ}) = op(\overrightarrow{AB}) \Rightarrow R \in K_1$

$P * A * R * Q \Rightarrow A * R * Q \Rightarrow R \in \Sigma_1$, pues está entre dos elementos de Σ_1, y Σ_1 es convexo.

Los otros casos se demuestran con argumentos similares.

Por lo tanto, si se cumple el Axioma de Dedekind, lo podemos aplicar a la partición de Dedekind $\{K_1, K_2\}$:

Existirá un punto $O \in r$ tal que

Si $P \in K_1$ y $Q \in K_2$, $P, Q \neq O$, se tiene $P * O * Q$

El punto de corte O pertenecerá a la semirrecta $s = \overrightarrow{AB}$, y $O \neq A$.

Efectivamente, supongamos que $O = A$. Tomamos cualquier punto $Q \in \Sigma_1 - \{A\}$, y cualquier punto $P \in op(\overrightarrow{AB})$.

$P \in op(\overrightarrow{AB}) = op(\overrightarrow{AQ}) \Rightarrow P * A * Q$, es decir, $P * O * Q$ con $P, Q \in K_1$, lo cual es absurdo por definición de punto de corte.

Supongamos que $O \in op(\overrightarrow{AB}) - \{A\}$. Entonces existirá un $Q \in op(\overrightarrow{AB})$ tal que $Q * O * A$, con $Q, A \in K_1$, lo cual es igualmente absurdo.

Por lo tanto, tenemos una versión del Axioma de Dedekind adaptada a semirrectas:

Si $P \in \Sigma_1$ y $Q \in \Sigma_2$, $P, Q \neq O$, se tiene $P * O * Q$

4.3 Circunferencias.

4.3.1 Definición. Circunferencia.

Sea un segmento $\overline{AB}$. Definimos la circunferencia de centro A y radio $\overline{AB}$ como el conjunto de puntos P tales que $\overline{AP} \cong \overline{AB}$. Es decir, por el conjunto:

$$\left\{ P \mid \overline{AP} \cong \overline{AB} \right\}$$

4.3.2 Definición. Interior y exterior de una circunferencia.

Sea γ una circunferencia de centro A y radio $\overline{AB}$. Definimos el interior de γ como el conjunto:

$$\left\{ P \mid \overline{AP} < \overline{AB} \right\} \cup \{A\}$$

Definimos el exterior de γ como el conjunto:

$$\left\{ P \mid \overline{AP} > \overline{AB} \right\}$$

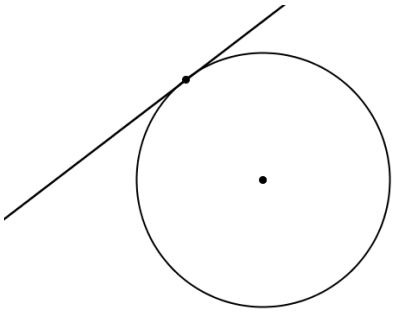
Observación: Por la ley de tricotomía, todo punto está en la circunferencia, en su interior o en su exterior. Además, de forma exclusiva.

4.3.3 Definición. Círculo.

Diremos círculo (o disco cerrado) a la unión de una circunferencia y su interior. El interior de una circunferencia también se denomina disco abierto.

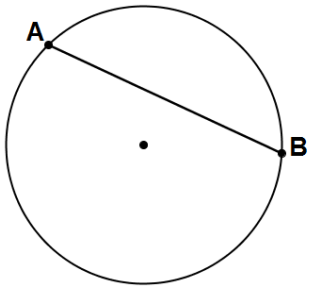
4.3.4 Definición. Recta tangente a una circunferencia.

Diremos que una recta r es tangente a la circunferencia γ cuando se corten en un único punto.

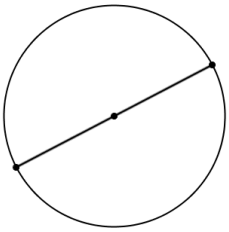


4.3.5 Definición. Cuerdas. Diámetro.

Diremos que el segmento $\overline{AB}$ es una **cuerda** de la circunferencia γ cuando sus extremos A y B pertenezcan a la circunferencia.



Un **diámetro** de la circunferencia es una cuerda que pasa por el centro de la circunferencia.



4.3.6 Lema.
Supongamos que γ es un círculo con centro O. Sean A y B dos puntos del interior de γ, tales que O, A y B no son colineales. Si A*D*B entonces D está también en el interior de γ.

Demostración. Sea $\overline{OE}$ el radio del círculo.
Puesto que O, A y B no son colineales podemos considerar el triángulo ΔOAB.
Supongamos que $\overline{AC} > \overline{AB}$ o que $\overline{AC} \cong \overline{AB}$. Puesto que A*D*B, podemos aplicar el lema 2.7.8 para deducir que $\overline{AC} > \overline{AD}$, luego $\overline{OE} > \overline{AC} > \overline{AD} \Rightarrow \overline{OD} > \overline{AD}$ y por lo tanto D pertenece al interior del círculo. Un razonamiento similar sirve para el caso $\overline{AC} < \overline{AB}$.

4.3.7 Corolario.
El interior de un círculo es convexo.

Demostración. Sea $\overline{OE}$ el radio del círculo. Sean A y B dos puntos del interior del círculo, y supongamos que A*D*B. Veamos que D pertenece también al interior.
Supongamos que O, A y B son colineales, y supongamos también que son diferentes.
Entonces se pueden dar tres casos: i) O*A*B, ii) A*O*B o iii) A*B*O.
Si sucede i) $O*A*B \wedge A*D*B \Rightarrow O*A*D*B \Rightarrow O*D*B \Rightarrow \overline{OD} < \overline{OB} < \overline{OE}$, y por lo tanto D pertenece al interior del círculo.
Si sucede iii) razonamos de la misma manera:
$A*B*O \wedge A*D*B \Rightarrow A*D*B*O \Rightarrow A*D*O \Rightarrow \overline{OD} < \overline{OA} < \overline{OE}$
Por último, si sucede ii)
$A*O*B \wedge A*D*B \Rightarrow A*O*D*B \vee A*D*O*B \Rightarrow O*D*B \vee O*D*A$,
pero entonces $O*D*B \Rightarrow \overline{OD} < \overline{OB} < \overline{OE}$ y $O*D*A \Rightarrow \overline{OD} < \overline{OA} < \overline{OE}$.
Si O, A y B no son colineales, podemos aplicar el lema anterior para asegurar que D pertenece al interior del círculo.

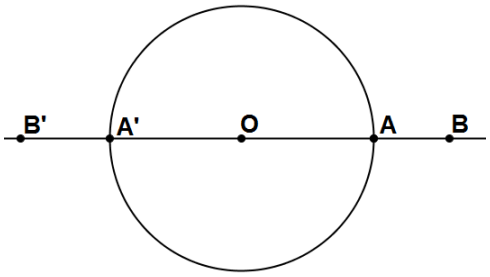
4.3.8 Proposición.
Los discos cerrados son convexos.

Demostración.

4.3.9 Ejercicio.
Demuestra que el exterior de un círculo no es convexo.

Demostración.
Sea γ un círculo con centro O y radio $\overline{OA}$.

En $op(\overrightarrow{OA})$ sea A' tal que $\overline{OA'} = \overline{OA}$. (Axioma C2)
Tenemos $A'*O*A$.
Sea $B \in \overrightarrow{OA}$ tal que $O*A*B$, y sea $B' \in \overrightarrow{OA'}$ tal que $O*A'*B'$. (Axioma B2)



Veamos que $B'*O*B$:

$$\left.\begin{array}{l} A'*O*A \\ O*A*B \end{array}\right\} \Rightarrow A'*O*A*B \Rightarrow A'*O*B \left.\begin{array}{l} \\ \\ O*A'*B' \Rightarrow B'*A'*O \end{array}\right\} \Rightarrow B'*A'*O*B \Rightarrow B'*O*B$$

Luego $O \in \overline{BB'}$, pero $O \notin Ext(\gamma)$.

4.3.10 Lema.
Sea γ un círculo, y $\overline{AB}$ un segmento con A en el interior de γ y B en su exterior. Entonces la intersección de $\overline{AB}$ con el interior de γ es convexo, y la intersección de $\overline{AB}$ con el exterior de γ es también convexo.

Demostración. El segmento $\overline{AB}$ es convexo por 3.1.5. El interior de un círculo es convexo por 3.2.7. La intersección de dos conjuntos convexos es convexa por 3.1.6. Luego la intersección de $\overline{AB}$ con el interior de γ será convexa.
Veamos que la intersección de $\overline{AB}$ con el exterior de γ es también convexa.
Supongamos que no. Entonces existirán X*Z*Y en $\overline{AB}$ con X, Y en el exterior de γ, pero con Z que no está en el exterior de γ, es decir, Z pertenece al disco cerrado. Reordenando Y e Y si es necesario, podemos suponer A*X*Y, luego A*X*Z*Y y por tanto A*X*Z, con A y Z en el disco cerrado. Pero un disco cerrado es convexo (3.2.8), luego X pertenecerá también al disco cerrado, llegando a contradicción.

4.3.11 Postulado. Postulado de la Intersección Circunferencia-Segmento.
Sea γ una circunferencia y $\overline{AB}$ un segmento tal que A pertenece al interior de γ y B pertenece al exterior de γ. Entonces la circunferencia y el segmento se cortan.

4.3.12 Teorema.
Suponiendo el axioma de Dedekind se cumple el Postulado de la Intersección Circunferencia-Segmento.

Demostración. Sea γ una circunferencia y denotamos por $\hat{\gamma}$ su interior y por $\check{\gamma}$ su exterior. Sea $\overline{AB}$ un segmento tal que $A \in \hat{\gamma}$ y $B \in \check{\gamma}$.
Supongamos que $\overline{AB} \cap \gamma = \varnothing$. Entonces $\Sigma_1 = \overline{AB} \cap \hat{\gamma}$ y $\Sigma_2 = \overline{AB} \cap \check{\gamma}$ es un corte de Dedekind de $\overline{AB}$. Efectivamente, por el lema 4.2.10 ambos conjuntos son convexos.

Son disjuntos pues $\hat{\gamma}$ y $\check{\gamma}$ son disjuntos, y puesto que suponemos $\overline{AB} \cap \gamma = \varnothing$, tenemos que $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \overline{AB}$.
Por lo tanto, por 3.1.13, existirá un punto de corte C. Dicho punto de corte tiene que estar en Σ_1 o en Σ_2.
Falta ver (????) que $C \notin \Sigma_1$ y $C \notin \Sigma_2$, llegando a contradicción. Luego se tiene que cumplir $\overline{AB} \cap \gamma \neq \varnothing$.

4.3.13 Postulado. Postulado de la Intersección Circunferencia-Circunferencia.
Sean γ y δ dos circunferencias. Si γ contiene un punto del interior de δ y un punto del exterior de δ, entonces γ contiene un punto de δ. Es decir, las dos circunferencias se cortan.

4.3.14 Teorema.
Suponiendo el axioma de Dedekind se cumple el postulado de la Intersección Circunferencia-Circunferencia.

Demostración.

4.3.15 Corolario. (Elementos 1.1).
Sea un segmento $\overline{AB}$. Entonces existe un punto C tal que ΔABC es un triángulo equilátero.

Demostración. Sea γ la circunferencia con centro A y radio $\overline{AB}$. Sea δ la circunferencia con centro en B y radio $\overline{BA}$. Claramente $B \in \gamma$, luego γ contiene un punto del interior de δ. Sea D un punto tal que D*A*B y $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ (axiomas B2 y C2). Entonces $D \in \gamma$. Pero $\overline{DB} > \overline{AB}$, por lo que D está en el exterior de δ.
Aplicando el teorema anterior 3.2.14, existirá un punto C en la intersección de γ y δ.
A, B y C no pueden ser colineales (???? Demostrar)
Así pues, A, B y C formarán un triángulo.
Puesto que $C \in \gamma$, $\overline{AC} \cong \overline{AB}$, pero por otro lado $C \in \delta$, $\overline{BC} \cong \overline{BA}$, es decir, los tres lados son congruentes, y por lo tanto el triángulo será equilátero.

Nota histórica. Este es el primer resultado que Euclides pretende demostrar en sus Elementos, y lo hace suponiendo la existencia de puntos de intersección de dos circunferencias, cosa que no se deduce de los axiomas previos. En el siglo XIX se vio la necesidad de añadir un axioma como el axioma de Dedekind.

4.4 Multiplicación de segmentos. Postulado de Arquímedes.

4.4.1 Definición. Multiplicación de segmentos y "n-puntos".

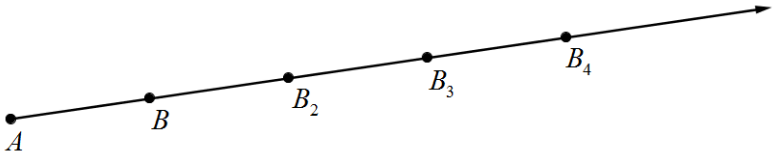
Sea $\overrightarrow{AB}$ una semirrecta.

Definimos $1\cdot\overline{AB}$ como el propio $\overline{AB}$. Definimos $B_0 = A$ y $B_1 = B$.

Sea B_2 el punto (único y diferente de A y B) tal que $A*B*B_2$ y $\overline{BB_2} \cong \overline{AB}$.

Definimos $2\cdot\overline{AB}$ como el segmento $\overline{AB_2}$.

Este procedimiento lo podemos repetir infinitamente: Supongamos que hemos definido $k\cdot\overline{AB}$ como el segmento $\overline{AB_k}$, donde $B_k \neq A$ pertenece a la recta $\overleftrightarrow{AB}$. Sea B_{k+1} el punto tal que $A*B_k*B_{k+1}$ y $\overline{B_kB_{k+1}} \cong \overline{AB}$. Entonces definimos el segmento $(k+1)\cdot\overline{AB}$ por el segmento $\overline{AB_{k+1}}$.



De esta manera obtenemos los puntos $B_0 = A, B_1 = B, B_2, B_3, B_4, \ldots$, y por tanto una función

$$\Phi : IN \to \overrightarrow{AB}$$
$$n \mapsto n \bullet B = B_n$$

Notación. Utilizaremos las dos notaciones indistintamente, pues dependiendo del contexto, será más claro escribir una u otra. La notación con subíndice B_k nos ahorra escribir el símbolo del producto, pero nos obliga a trabajar con engorrosos dobles subíndices $(B_n)_m$, mientras que la notación multiplicativa $k \bullet B$ es más cómoda para denotar la composición: $m \bullet (n \bullet B)$

4.4.2 Proposición.

La aplicación $\Phi : IN \to r$ es inyectiva y mantiene el orden:

a) $n < m \Rightarrow \overline{AB_n} < \overline{AB_m}$

b) $0 < n < m \Rightarrow B_0 * B_n * B_m$

c) $\overline{AB} < \overline{AC} \Leftrightarrow \overline{AB_n} < \overline{AC_n}$

d) $\overline{AB} > \overline{AC} \Leftrightarrow \overline{AB_n} > \overline{AC_n}$

e) $\overline{AB} \cong \overline{AC} \Leftrightarrow \overline{AB_n} \cong \overline{AC_n}$

Demostración.

Todas estas propiedades se demuestran por inducción sobre n.

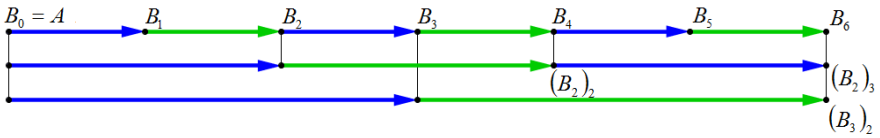
Para los apartados a) y b) aplicamos la propiedad $A*B_k*B_{k+1}$.

4.4.3 Proposición.

La función anterior cumple la siguiente propiedad:

$$(B_n)_m = B_{n\cdot m} = (B_m)_n$$

O con notación multiplicativa: $m \bullet (n \bullet B) = (m \cdot n) \bullet B = n \bullet (m \bullet B)$

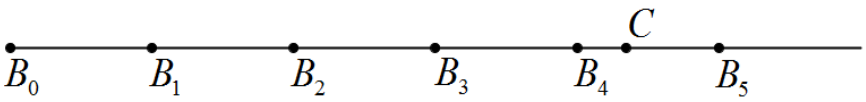


Demostración.
Sea un natural k y supongamos que $n \mid \mathrm{k}$, es decir, $k = n \cdot m$.
De entre todos los puntos podemos seleccionar los puntos $\{B_0 = A, B_n, B_{2n}, B_{3n}, B_{4n}, ..., B_{m \cdot n}\}$.
De forma constructiva, podemos demostrar que $(B_n)_2 = B_{2n}$:
$(B_n)_2$ es el único punto de la semirrecta $\overrightarrow{AB_n}$ tal que $A * B_n * (B_n)_2$ y $\overline{AB_n} \cong \overline{B_n(B_n)_2}$.
Pero $\overline{B_n(B_n)_2}$ es una sucesión de n intervalos todos congruentes con $\overline{AB}$, luego $\overline{AB_n} \cong \overline{B_n(B_n)_2}$.
De forma inductiva se demuestra que $(B_n)_m = B_{mn}$.
Por la propiedad conmutativa de la multiplicación de números,

$$(B_n)_m = B_{n \cdot m} = B_{m \cdot n} = (B_m)_n$$

4.4.4 Postulado. Postulado de Arquímedes.

Dada una semirrecta $r = \overrightarrow{AB}$ y un punto $C \in r$ cualquiera, existirá un n tal que $B_n = C$ o $A * C * B_n$.



Con otras palabras, multiplicando segmentos, por muy pequeños que estos sean, podremos siempre obtener segmentos tan grandes como queramos.

4.4.5 Teorema.

Si se cumple el axioma de Dedekind entonces también se cumple el Postulado de Arquímedes.

Demostración. Supongamos que no es cierto.
Utilizaremos la versión del axioma de Dedekind para semirrectas (4.2.10).
Sea Σ_1 el conjunto definido por A y todos los puntos $P \in r$ para los cuales el Postulado de Arquímedes se cumple, es decir, existe un n tal que $n \bullet P = C$ o $A * C * n \bullet P$, y sea $\Sigma_2 = r - \Sigma_1$.
Veamos que $\{\Sigma_1, \Sigma_2\}$ es una partición de Dedekind de r.
Σ_1 no es un conjunto vacío, pues $A \in \Sigma_1$.
Σ_2 no es un conjunto vacío pues suponemos que no se cumple el Postulado de Arquímedes.
Claramente $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = r$ y $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \varnothing$.

Σ_1 es un conjunto convexo: Sean $P,Q \in \Sigma_1$, es decir, existen m y n tales que $n \bullet \overline{AP} > \overline{AC}$ y $m \bullet \overline{AQ} > \overline{AC}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $m > n$.
Entonces, para todo R tal que $P*R*Q$, tendremos $m \bullet \overline{AP} * m \bullet \overline{AR} * m \bullet \overline{AQ}$
y por tanto $\overline{AC} < n \bullet \overline{AP} < m \bullet \overline{AP}$, y por tanto $P \in \Sigma_1$.

Σ_2 es un conjunto convexo. Sean $P,Q \in \Sigma_2$, y sea R tal que $P*R*Q$. Supongamos que $R \in \Sigma_1$, es decir, que existe un n tal que $n \bullet \overline{AR} > \overline{AC}$.
Entonces $P*R*Q \Rightarrow n \bullet \overline{AP} < n \bullet \overline{AR} < n \bullet \overline{AQ}$ y por tanto $\overline{AC} < n \bullet \overline{AR} < n \bullet \overline{AQ}$, luego $Q \in \Sigma_1$ contradiciendo la hipótesis. Así pues, $R \in \Sigma_2$.

Al suponer que se cumple el axioma de Dedekind lo podemos aplicar a nuestra partición $\{\Sigma_1, \Sigma_2\}$ para garantizar un punto de corte $O \in r$. Vamos a ver que no se puede dar ni $O \in \Sigma_1$ ni $O \in \Sigma_2$, contradiciendo la hipótesis inicial.
El caso $O = A$ no puede ocurrir.
Si $O \in \Sigma_1$, tomando el punto A y cualquier punto $Q \notin \Sigma_2 \neq \varnothing$, por definición de punto de corte, tendremos $A*O*Q$, pero
$O \in \Sigma_1$ y $A*O*Q$ implica $Q \in \Sigma_1$ llegando a contradicción.
Si $O \in \Sigma_2$, tomando cualquier punto $Q \in \Sigma_1 \neq \varnothing$, y el punto $R = 2 \bullet O \in \Sigma_2$, tendremos $Q*O*R$, pero
$Q \in \Sigma_1$ y $Q*O*R$ implica $O \in \Sigma_1$ llegando a contradicción.

4.5 División de segmentos.

4.5.1 Postulado. Postulado de la división de segmentos.

El **Postulado de la división de segmentos** afirma que dado un segmento $\overline{AB}$ cualquiera y un número natural $n>1$, podemos determinar los puntos del segmento $\{ A=P_0, P_1, P_2, ..., P_n=B \}$ tales que $\overline{P_kP_{k+1}} \cong \overline{AP_1}$,
es decir, podemos dividir dicho segmento en n partes iguales.

En 7.3.3 veremos que en un plano euclídeo se cumple siempre este postulado. Sin embargo, con las herramientas de que disponemos no podemos garantizarlo.

4.5.2 Proposición.

Dada una semirrecta $r=\overrightarrow{AB}$, y cualquier natural $n>1$, existirá un punto $P \in r$ tal que $A*n \bullet P*B$.

Demostración.
Sea B_2 el punto medio de $\overline{AB}$, sea B_3 el punto medio de $\overline{AB_2}$, sea B_3 el punto medio de $\overline{AB_3}$ ... De esta manera vamos obteniendo una sucesión de puntos $B_2, B_3, B_4, ...$ del segmento $\overline{AB}$ tales que $2^k \bullet B_k = B$
Para un n cualquiera basta tomar un k tal que $n \leq 2^k$ (un resultado de la aritmética), y el punto B_k cumplirá las condiciones requeridas:

$$n \bullet B_k \leq 2^k \bullet B_k = B$$

4.6 Distancia entre puntos de una semirrecta.

4.6.1 Teorema. Distancia entre puntos de una semirrecta.

Sea $r = \overrightarrow{AB}$ una semirrecta. Al punto B le llamaremos "**punto unidad**".

Existirá una <u>única</u> función

$$\Phi : R^+ = \{x \in IR \mid x \geq 0\} \to r$$

que cumpla las siguientes cinco condiciones:

1) $\Phi(0) = A$.
2) $\Phi(1) = B$.
3) Ser biyectiva.
4) Si $0 < x < y \Leftrightarrow \Phi(0) * \Phi(x) * \Phi(y)$
5) $\forall n \in IN, \forall x \in IR^+, n \bullet \Phi(x) = \Phi(n\,x)$

La función Φ dependerá, por lo tanto, única y exclusivamente del punto B fijado. Vamos a construir esta función por partes, primero para los números naturales, luego para los racionales y finalmente para los irracionales, utilizando en cada momento la función ya construida en la fase anterior.

4.6.2 Proposición. Construcción de Φ para números naturales.

Es la función definida en 4.4.1:

$$\forall n \in IN, \Phi(k) = k \bullet B = B_k$$

Por la proposición 4.4.2, esta función es inyectiva y cumple la condición 4.
Por la proposición 4.4.3, se cumple la condición 5:

$$\forall n, m \in IN, n \bullet \Phi(m) = (B_m)_n = B_{m \cdot n} = \Phi(m \cdot n)$$

4.6.3 Proposición. Construcción de Φ para números racionales.

Escribimos $x = \frac{m}{n}$ para m y n enteros positivos. Queremos que la imagen $P = \Phi\left(\frac{m}{n}\right)$ cumpla la condición $n \bullet \Phi\left(\frac{m}{n}\right) = \Phi\left(n\frac{m}{n}\right) = \Phi(m)$, es decir, .

Vamos a ver que la condición $n \bullet P = \Phi(m) = m \bullet B$ (es decir, $P_n = B_m$) determinará totalmente el punto P.

Separamos los puntos de la semirrecta r en dos grupos: Los que '*no llegan*' y los que '*llegan o se pasan*':

$$\Sigma_< = \{ P \in r \mid P_0 * P_n * B_m \}\ ,\ \Sigma_\geq = \{ P \in r \mid P_n = B_m \vee P_0 * B_m * P_n \}$$

Primera parte: $\{\Sigma_<, \Sigma_\geq\}$ es una partición de r.

- Los conjuntos $\Sigma_<$ y $\Sigma_\geq$ son disjuntos:
Si $P \in r$ y $P_0 * P_n * B_m$ entonces no se puede dar $P_n = B_m$ ni $P_0 * B_m * P_n$.

- La unión de $\Sigma_<$ y $\Sigma_\geq$ es todo r:
Sea $P \in r$. Comparando los tres puntos P_0, P_n, B_m, puede ocurrir que $P_n = B_m$, en cuyo caso $P \in \Sigma_\geq$, o que $P_n \neq B_m$, en cuyo caso son tres puntos diferentes de r, y por tanto sólo se puede dar uno de los tres casos siguientes:

a) $P_0 * P_n * B_m$, b) $P_0 * B_m * P_n$, o c) $B_m * P_0 * P_n$

Si sucede a) entonces $P \in \Sigma_<$. Si sucede b) entonces $P \in \Sigma_\geq$.
El caso c) no puede suceder: $B_m * P_0 * P_n \Rightarrow B_m \notin \overrightarrow{P_0 P_n} = r$, absurdo

- El conjunto $\Sigma_<$ no está vacío: Es la proposición 4.4.7.

- El conjunto $\Sigma_\geq$ no está vacío:

Segunda parte: Los conjuntos $\Sigma_<$ y $\Sigma_\geq$ son convexos (es decir, es una partición de Dedekind de r).

Supongamos que $Q_1 * Q_2 * Q_3$ para ciertos puntos $Q_1, Q_3 \in \Sigma_<$.
Puesto que $A = B_0$ es el extremo de la semirrecta r, no se puede dar el caso $Q_1 * B_0 * Q_3$, y por tanto o bien $B_0 * Q_1 * Q_3$ o bien $B_0 * Q_3 * Q_1$. Renombrando los puntos si hace falta podemos suponer $B_0 * Q_1 * Q_3$, y por lo tanto $B_0 * Q_1 * Q_2 * Q_3$.
Así pues, $\overline{B_0 Q_2} < \overline{B_0 Q_3}$, y por tanto $n \bullet Q_2 < n \bullet Q_3$
Puesto que $Q_3 \in \Sigma_<$ se cumple que $B_0 * n \bullet Q_3 * B_m$, y por tanto $n \bullet Q_3 < n \bullet B_m$, luego $n \bullet Q_2 < n \bullet Q_3 < n \bullet B_m$, es decir, $Q_2 \in \Sigma_<$.
La segunda condición se demuestra de forma similar.

Tercera parte: Aplicamos el axioma de Dedekind, que nos garantiza la existencia de un único punto de corte para esta partición, es decir, existirá un único $P \in r$ que está entre los dos conjuntos $\Sigma_<$ y $\Sigma_\geq$. Este punto será la imagen $\Phi\left(\frac{m}{n}\right)$.

Cuarta parte: La función así definida cumple las condiciones requeridas.

- La función Φ es inyectiva.

- El punto $\Phi\left(\frac{m}{n}\right)$ cumple la condición fundamental: $n \bullet \Phi\left(\frac{m}{n}\right) = \Phi(m)$

- La función Φ cumple la condición (5): $\forall n \in IN, \forall x \in Q, n \bullet \Phi(x) = \Phi(n\,x)$

- La función Φ cumple la condición (4): $0 < x < y \Rightarrow \Phi(0) * \Phi(x) * \Phi(y)$

Supongamos $\frac{n}{m} < \frac{n'}{m'} \Leftrightarrow n \cdot m' < n' \cdot m \Rightarrow \Phi(n \cdot m') < \Phi(n' \cdot m)$

Por otro lado, como sabemos que cumple la condición 4, tenemos:

$$(m \cdot m') \bullet \Phi\left(\frac{n}{m}\right) = \Phi\left((m \cdot m')\frac{n}{m}\right) = \Phi\left(n \cdot m'\right)$$

$$(m \cdot m') \bullet \Phi\left(\frac{n'}{m'}\right) = \Phi\left((m \cdot m')\frac{n'}{m'}\right) = \Phi\left(n \cdot m'\right)$$

Luego

$$\Phi(n \cdot m') < \Phi(n' \cdot m) \Rightarrow (m \cdot m') \bullet \Phi\left(\frac{n}{m}\right) < (m \cdot m') \bullet \Phi\left(\frac{n'}{m'}\right) \Rightarrow \Phi\left(\frac{n}{m}\right) < \Phi\left(\frac{n'}{m'}\right)$$

Y por tanto:

$$(m \cdot m') \bullet \Phi\left(\frac{n}{m}\right) < (m \cdot m') \bullet \Phi\left(\frac{n'}{m'}\right) \Rightarrow \Phi\left(\frac{n}{m}\right) < \Phi\left(\frac{n'}{m'}\right)$$

4.6.4 Proposición. Construcción de Φ para números irracionales.
Sea x un número irracional positivo. Definimos

$$S_{<x} = \left\{\Phi(m/n) \mid m/n < x\right\}\ ,\ S_{\geq x} = \left\{\Phi(m/n) \mid m/n \geq x\right\}$$

Puesto que quedarán huecos entre los elementos de $S_{<x}$, definimos

$$\Sigma_{<x} = S_{<x} \cup \left\{P \in r \mid \quad Q * P * R \quad con \quad Q, R \in S_{<x}\right\}$$

y su complementario: $\Sigma_{\geq x} = r - \Sigma_{<x}$.

Primera parte: $\left\{\Sigma_{<x}, \Sigma_{\geq x}\right\}$ es una partición de r.

- Los conjuntos $\Sigma_{<x}$ y $\Sigma_{\geq x}$ son disjuntos y su unión es todo r por construcción.

- Observamos que $S_{\geq x} \subset \Sigma_{\geq x}$:

Si $P \in S_{\geq x} \Leftrightarrow P = \Phi\left(\frac{m}{n}\right), \frac{m}{n} \geq x$, luego claramente $P \notin S_{<x}$.

Si existen $Q, R \in S_{<x}$ tales que $Q * P * R$, tendríamos

$Q = \Phi\left(\frac{m'}{n'}\right), \frac{m'}{n'} < x$ y $R = \Phi\left(\frac{m''}{n''}\right), \frac{m''}{n''} < x$, y puesto que Φ conserva el orden,

$\Phi\left(\frac{m'}{n'}\right) * \Phi\left(\frac{m}{n}\right) * \Phi\left(\frac{m''}{n''}\right) \Rightarrow \frac{m'}{n'} < \frac{m}{n} < \frac{m''}{n''} < x \Rightarrow \frac{m}{n} < x$ llegando a contradicción.

Luego $P \notin \Sigma_{<x}$, y por tanto $P \in S_{\geq x}$.

- El conjunto $\Sigma_{<x}$ no está vacío.

Utilizamos la propiedad de la densidad de Q en IR. Para todo $x > 0$ irracional existirá un x' racional $0 < x' < x$. Claramente $\Phi(x') \in S_{<x}$.

- El conjunto $\Sigma_{\geq x}$ no está vacío.

Nuevamente utilizamos la densidad de Q en IR. Para todo $x > 0$ irracional basta tomar un x' natural tal que $x < x'$. Claramente $\Phi(x) \in S_{\geq x}$.

Segunda parte: Los conjuntos $\Sigma_{<x}$ y $\Sigma_{\geq x}$ son convexos (es decir, es una partición de Dedekind de r).

- El conjunto $\Sigma_{<x}$ es convexo.

Sean $P, Q \in \Sigma_{<x}$ y supongamos que $P * R * Q$. Queremos ver que $R \in \Sigma_{<x}$.

Supongamos en primer lugar que $P, Q \in S_{<x}$. Entonces claramente por construcción tenemos que $R \in \Sigma_{<x}$.

Supongamos que $P \in S_{<x}$ pero $Q \in \Sigma_{<x} - S_{<x}$. Existirán $Q', Q'' \in S_{<x}$ tales que $Q' * Q * Q''$, luego $P * R * Q''$ y por tanto $R \in \Sigma_{<x}$.

Supongamos que $Q \in S_{<x}$ pero $P \in \Sigma_{<x} - S_{<x}$. Existirán $P', P'' \in S_{<x}$ tales que $P' * P * P''$, luego $P' * R * Q$ y por tanto $R \in \Sigma_{<x}$.

El caso $P, Q \in \Sigma_{<x} - S_{<x}$ se demuestra de forma similar.

- El conjunto $\Sigma_{\geq x}$ es convexo.

Tercera parte:

Aplicamos el axioma de Dedekind, que nos garantiza la existencia de un único punto de corte para esta partición, es decir, existirá un único $P \in r$ que está entre los dos conjuntos $\Sigma_{<x}$ y $\Sigma_{\geq x}$. Este punto será la imagen $\Phi(x)$.

Cuarta parte: La función así definida cumple las condiciones requeridas.

- La función Φ es inyectiva.

Esto ya ha sido probado para los números racionales. Supongamos ahora que tenemos $x < x'$ dos números irracionales diferentes. Por la densidad de Q en IR, existirá un y racional tal que $x < y < x'$, por lo tanto $\Phi(x) * \Phi(y) * \Phi(x')$ de donde deducimos que $\Phi(x) \neq \Phi(x')$.

- La función Φ cumple la condición (4): $0 < x' < x \Rightarrow \Phi(0) * \Phi(x') * \Phi(x)$

En primer lugar, supongamos que x' es racional y x es irracional.

$0 < x' < x \Rightarrow \Phi(x') \in S_{<x} \subset \Sigma_{<x} \Rightarrow B_0 * \Phi(x') * \Phi(y)$

Supongamos que ambos son irracionales:

Por densidad de Q en IR, existirá un racional x'' cumpliendo $0 < x' < x'' < x$, luego $P_0 * \Phi(x') * \Phi(x'') * \Phi(x) \Rightarrow P_0 * \Phi(x') * \Phi(x)$

- La función Φ cumple la condición (5): $\forall n \in IN, \forall x \in IR, n \bullet \Phi(x) = \Phi(n x)$

- La función Φ es suprayectiva.

Sea $P \in r$. Si $P = \Phi(m/n)$ para cierto racional m/n, claramente P pertenece a la imagen de Φ.

Supongamos lo contrario, que no es imagen de ningún racional.

Definimos los siguientes conjuntos:

$$S_{<P} = \{0\} \cup \{x \in Q \mid B_0 * \Phi(x) * P\} \ , \ S_{>P} = \{x \in Q \mid B_0 * P * \Phi(x)\}$$

El conjunto $S_{<P}$ claramente no está vacío, pues $0 \in S_{<P}$.

El conjunto $S_{>P}$ no está vacío, pues o bien $B_0 * P * B_1$, en cuyo caso $1 \in S_{>P}$, o por el Postulado de Arquímedes, existirá un $n \in IN$ tal que $B_0 * P * B_n$, y por tanto $n \in S_{>P}$.

Puesto que la función Φ mantiene el orden, todo elemento de $S_{<P}$ será menor que cualquier elemento de $S_{>P}$, de lo que se deduce que $\{S_{<P}, S_{>P}\}$ es una partición de Dedekind, por lo que tendrá un punto de corte $y \in IR$, que estará entre los dos conjuntos. Veamos que $\Phi(y) = P$.

Sea $\Sigma_{<P}$ la imagen de $S_{<P}$ junto con todos los puntos Q de r tales que R*Q*S para ciertos $R, Q \in \Phi(S_{<P})$. Sea $\Sigma_{\geq P} = r - \Sigma_{<P}$.
Entonces se demuestra que $\Phi(y) = P$.

4.7 Longitud de segmentos.

4.7.1 Definición. Longitud de segmentos.

Sea $r = \overrightarrow{P_0P_1}$ una semirrecta en la que fijamos arbitrariamente un punto $P_1 \in r$, al que llamaremos "**punto unidad**".
En el apartado anterior hemos determinado la única biyección Φ entre los puntos de la semirrecta y $IR^+ = [0,+\infty)$.

Sea ahora un segmento $\overline{AB}$ cualquiera. El axioma C2 nos garantiza que existirá un único punto $P \in r$ tal que $\overline{AB} \cong \overline{P_0P}$. Definiremos la longitud del segmento $\overline{AB}$ como $\Phi^{-1}(P)$:

$$\left|\overline{AB}\right| = \Phi^{-1}(P)$$

4.7.2 Proposición.

a) $\overline{AB} \cong \overline{CD} \Leftrightarrow \left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{CD}\right|$

b) $\overline{AB} < \overline{CD} \Leftrightarrow \left|\overline{AB}\right| < \left|\overline{CD}\right|$

Demostración. Son resultados que se deducen directamente de la definición y de las propiedades de Φ.
a) Sean dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ y supongamos que $\overline{AB} \cong \overline{P_0P}$ y $\overline{CD} \cong \overline{P_0P'}$ para ciertos puntos $P, P' \in r$. $\overline{AB} \cong \overline{CD} \Leftrightarrow P = P' \Leftrightarrow \Phi^{-1}(P) = \Phi^{-1}(P')$
b) $\overline{AB} < \overline{CD} \Leftrightarrow P_0 * P * P' \Leftrightarrow \Phi^{-1}(P_0) < \Phi^{-1}(P) < \Phi^{-1}(P') \Leftrightarrow 0 < \left|\overline{AB}\right| < \left|\overline{CD}\right|$

4.7.3 Lema.

Si $P_0 * P * Q$ entonces $\left|\overline{PQ}\right| = \Phi^{-1}(Q) - \Phi^{-1}(P)$.

Demostración.
Primera parte: El resultado es cierto para puntos enteros:
Supongamos que $P = B_n$ y $Q = B_m$, con $n > m$.
$\Phi^{-1}(Q) = \Phi^{-1}(B_m) = m$, $\Phi^{-1}(P) = \Phi^{-1}(B_n) = n$
$\overline{PQ} = \overline{B_mB_n} \cong \overline{B_0B_{n-m}} \Rightarrow \left|\overline{PQ}\right| = n - m = \Phi^{-1}(P) - \Phi^{-1}(Q)$

Segunda parte: El resultado es cierto para puntos racionales:
Supongamos que $P = \Phi(n/m)$ y $Q = \Phi(n'/m')$, con $n/m > n'/m'$.
$\Phi^{-1}(Q) = n'/m'$, $\Phi^{-1}(P) = n/m$
$n/m < n'/m' \Leftrightarrow n \cdot m' < n' \cdot m \Leftrightarrow P_0 * \Phi(n \cdot m') * \Phi(n' \cdot m)$
Aplicando la primera parte,
$\left|\overline{\Phi(n' \cdot m)\ \Phi(n \cdot m')}\right| = n \cdot m' - n' \cdot m \Rightarrow$

$$\frac{\left|\overline{\Phi(n' \cdot m)\ \Phi(n \cdot m')}\right|}{m \cdot m'} = \frac{n \cdot m' - n' \cdot m}{m \cdot m'} = \frac{n \cdot m'}{m \cdot m'} - \frac{n' \cdot m}{m \cdot m'} = \frac{n}{m} - \frac{n'}{m'}$$

$P = \Phi(n/m) \Leftrightarrow m \bullet P = \Phi(n)$

$Q = \Phi(n'/m') \Leftrightarrow m' \bullet Q = \Phi(n')$

$\Phi(n' \cdot m) = m \bullet \Phi(n') = m \bullet m' \bullet Q = (m \cdot m') \bullet Q$

$\Phi(n \cdot m') = m' \bullet \Phi(n) = m' \bullet m \bullet P = (m \cdot m') \bullet P$

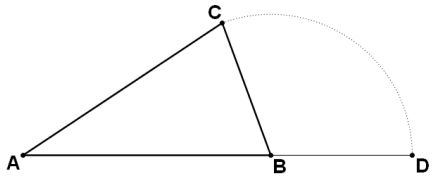
$$\frac{\left|\overline{\Phi(n' \cdot m)\ \Phi(n \cdot m')}\right|}{m \cdot m'} = \frac{\left|\overline{(m \cdot m') \bullet Q\ (m \cdot m') \bullet P}\right|}{m \cdot m'} = \frac{(m \cdot m')\left|\overline{PQ}\right|}{m \cdot m'} = \overline{PQ}$$

Donde hemos utilizado, sin demostrala, la propiedad $\left|\overline{k \bullet Q\ k \bullet P}\right| = k\left|\overline{PQ}\right|$

Tercera parte: El resultado es cierto para números reales en general:

4.7.4 Proposición. Desigualdad Triangular (Elementos Libro 1, Proposición 20)
Sea un triángulo ΔABC. Entonces $\left|\overline{AC}\right| < \left|\overline{AB}\right| + \left|\overline{BC}\right|$.

Demostración. Sea D un punto tal que A*B*D y $\left|\overline{BD}\right| = \left|\overline{BC}\right|$ (El axioma B2 nos garantiza que existe un punto A*B*X, y el axioma C2 nos garantiza que existe D en la semirrecta $\overrightarrow{BX}$.



Entonces $\overline{AC} < \overline{AD}$ por 3.7.10, y por tanto $\left|\overline{AC}\right| < \left|\overline{AD}\right|$.

Ahora bien, $A * B * D$ implica $\left|\overline{AD}\right| = \left|\overline{AB}\right| + \left|\overline{BD}\right|$, luego

$\left|\overline{AC}\right| < \left|\overline{AD}\right| = \left|\overline{AB}\right| + \left|\overline{BD}\right| = \left|\overline{AB}\right| + \left|\overline{BC}\right|$, como queríamos comprobar.

4.7.5 Conclusión. Longitud de segmentos.
Sea $\overline{OI}$ un segmento fijo llamado segmento unidad. Entonces existe una única forma de asignar a cada segmento $\overline{AB}$ un número real positivo $\left|\overline{AB}\right| \in IR$, llamado **longitud** de $\overline{AB}$, tal que:

L1) A*B*C si y sólo si $\left|\overline{AC}\right| = \left|\overline{AB}\right| + \left|\overline{BC}\right|$.

L2) $\left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{CD}\right|$ si y sólo si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

L3) $\left|\overline{OI}\right| = 1$.

Y además, dicha medida cumplirá:

L4) $\left|\overline{AB}\right| < \left|\overline{CD}\right|$ si y sólo si $\overline{AB} < \overline{CD}$.

L5) Para cada $x \in IR^+$, existe un segmento $\overline{AB}$ tal que $\left|\overline{AB}\right| = x$.

4.8 Amplitud de ángulos.

4.8.1 Definición. Duplicación de ángulos.

Dado un ángulo agudo $\angle P_0OP_1$, el axioma C5 garantiza la existencia de una semirrecta $\overrightarrow{OP_2}$, con P_0 y P_2 en lados opuestos respecto de $\overleftrightarrow{OP_1}$, tal que $\angle P_0OP_1 \cong \angle P_1OP_2$.

Mediante este procedimiento podemos decir que hemos duplicado el ángulo $\angle P_0OP_1$:

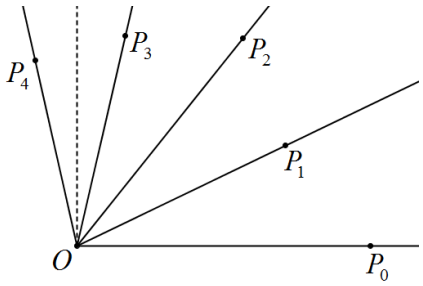
$$\angle P_0OP_2 = 2\angle P_0OP_1$$

Puede suceder que $\angle P_0OP_2$ sea agudo, recto o obtuso.

Si el ángulo $\angle P_0OP_2$ sigue siendo agudo, podemos repetir el procedimiento anterior con el punto P_1:

Aplicamos el axioma C5 para obtener una semirrecta $\overrightarrow{OP_3}$, con P_1 y P_3 en lados opuestos respecto de $\overleftrightarrow{OP_2}$, tal que $\angle P_1OP_2 \cong \angle P_2OP_3$, y diremos $\angle P_0OP_3 = 3\angle P_0OP_1$

Este procedimiento lo podemos continuar realizando mientras vayamos obteniendo ángulos agudos.



Tomemos ahora un ángulo recto $\angle P_0OP_{90}$ y un número entero n.

Para cada punto $P \in \overline{P_0P_{90}}$, $n\angle P_0OP$ será agudo o no. Definimos

$$S_< = \left\{ P \in \overline{P_0P_{90}} \mid n\angle P_0OP \text{ es agudo} \right\}$$

$$S_\geq = \overline{P_0P_{90}} - S_<$$

Extendemos la partición $\overline{P_0P_{90}} = S_< \cup S_\geq$ a toda la recta. Sean

$$\Sigma_< = S_< \cup op\left(\overrightarrow{P_0P_{90}}\right)$$

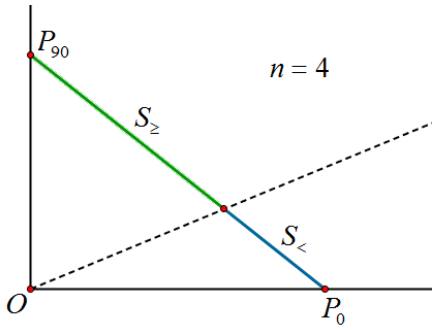
$$\Sigma_\geq = S_\geq \cup op\left(\overrightarrow{P_{90}P_0}\right)$$

$\Sigma_<$ y $\Sigma_\geq$ determinan una partición de la recta $\overleftrightarrow{P_0P_{90}}$, cumpliendo el axioma de Dedekind, por lo que existirá un único punto P entre $\Sigma_<$ y $\Sigma_\geq$.

Así pues, hemos determinado una función

$\sigma : IN \to \overline{P_0P_{90}}$

Definimos $P_1 = \sigma(90)$.



4.8.2 Teorema. Amplitud de ángulos.
Existe una única forma de asignar a cada ángulo α un número real positivo $|\alpha|$, llamado medida angular de α, tal que:

A1) Si D es un punto del interior de $\angle BAC$, $|\angle BAC| = |\angle BAD| + |\angle DAC|$

A2) $|\alpha| = |\beta|$ si y sólo si $\alpha \cong \beta$

A3) α es un ángulo recto si y sólo si $|\alpha| = 90$

Y además, dicha medida cumplirá:

A4) $|\alpha| < |\beta|$ si y sólo si $\alpha < \beta$

A5) $|\alpha| < 180$ para todo ángulo α.

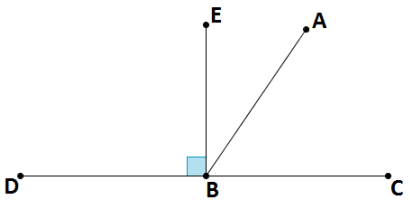
A6) Si α y β son suplementarios, entonces $|\alpha| + |\beta| = 180$.

A7) para cualquier $0 < x < 180$ existirá un ángulo α tal que $|\alpha| = x$

Observación: La condición A6 es equivalente a la Proposición Elementos 1.13, que se detalla a continuación.

4.8.3 Proposición. (Elementos 1.13)
Dos ángulos suplementarios equivalen a dos rectos.

Demostración que se encuentra en Elementos 1.13:
Sean tres puntos $D*B*C$ y una semirrecta $\overrightarrow{BA}$, determinando los ángulos suplementarios $\angle ABC$ y $\angle ABD$.



Si $\angle ABC \cong \angle ABD$, ambos son rectos y el teorema se cumple trivialmente.
Supongamos pues que $\angle ABC$ es agudo (En caso contrario $\angle ABD$ es agudo por 2.4.4)
Determinamos la semirrecta $\overrightarrow{BE}$ perpendicular a $\overleftrightarrow{DC}$, con E y A colaterales, es decir, $\angle CBE$ y $\angle EBD$ son dos ángulos rectos.

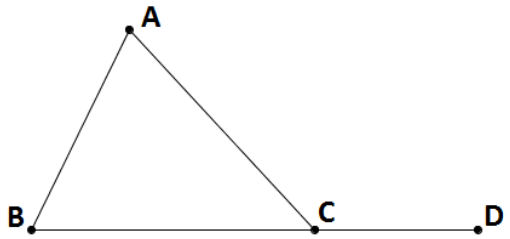
Claramente $\angle CBE = \angle CBA + \angle ABE$ luego
$\angle CBE + \angle EBD = \angle CBA + \angle ABE + \angle EBD$
Por otro lado, $\angle DBA = \angle EBD + \angle ABE$, luego
$\angle DBA + \angle CBA = \angle EBD + \angle ABE + \angle CBA$
De lo que deducimos que $\angle CBE + \angle EBD = \angle DBA + \angle CBA$, es decir, su suma equivale a la suma de dos rectos, tal y como queríamos ver.

4.8.4 Teorema. Recíproco del postulado de las paralelas. (Elementos 1.17)
Sea ΔABC un triángulo. Entonces $|\angle B| + |\angle C| < 180$.

Demostración. Sea D tal que D*C*B (Axioma B2). Por el Teorema del Ángulo Exterior (2.7.1) , $\angle ACD > \angle B$, luego $|\angle ACD| > |\angle B|$ por 3.5.1(d). Ahora bien, los ángulos $\angle ACD$ y $\angle C$ son suplementarios, luego $|\angle ACD| + |\angle C| = 180$ por 3.5.1(f), luego $180 = |\angle ACD| + |\angle C| < |\angle B| + |\angle C|$.

Demostración de Elementos 1.17:
Dos ángulos cualesquiera de un triángulo siempre suman menos que dos rectos.

Sea un triángulo ΔABC . Prolongamos el lado $\overline{BC}$ hasta un punto D, $B*C*D$.



Por 2.7.1 sabemos que $\angle ACD > \angle B$, luego sumando $\angle C$ a cada lado de la desigualdad obtenemos que $\angle ACD + \angle C > \angle B + \angle C$
pero $\angle ACD$ y $\angle C$ son suplementarios, luego suman dos rectos.
De la misma forma se demuestra la desigualdad para cualquier par otro par de ángulos del triángulo.

5 Paralelismo.

5.1 Suma angular y defecto de triángulos.

5.1.1 Definición. Suma angular de un triángulo. Defecto de un triángulo.

Si ΔABC es un triángulo, definimos su suma angular por

$$\sigma ABC = |\angle A| + |\angle B| + |\angle C|$$

y definimos el defecto del triángulo por

$$\delta ABC = 180 - \sigma ABC = 180 - |\angle A| - |\angle B| - |\angle C|$$

5.1.2 Proposición.

Sea ΔABC un triángulo y D un punto tal que A*D*C. Entonces $\delta ABC = \delta ABD + \delta DBC$.

Demostración. Sabemos que D está en el interior de $\angle ABC$ por el teorema CrossBar Betweenness (1.5.5), luego

$|\angle B| = |\angle ABD| + |\angle DBC|$ por axioma A1,

$\angle BDA$ y $\angle BDC$ son suplementarios, luego $|\angle BDA| + |\angle BDC| = 180$

$\delta ABD + \delta DBC =$

$= 180 - |\angle A| - |\angle ABD| - |\angle BDA| + 180 - |\angle BDC| - |\angle DBC| - |\angle C| =$

$= 360 - |\angle A| - |\angle C| - (|\angle ABD| + |\angle DBC|) + (|\angle BDA| + |\angle BDC|)$

$= 180 - |\angle A| - |\angle C| - |\angle B| = \delta ABC$

5.1.3 Lema.

Sea ΔABC un triángulo en el cual $|\angle A| = \alpha$. Entonces existe otro triángulo ΔXYZ para el cual $\sigma ABC = \sigma XYZ$ y con un ángulo con medida no superior a $\alpha/2$.

Demostración. Sea M el punto medio de $\overline{BC}$. (Existe por 2.9.5)

Sea D un punto tal que A*M*D y $\overline{AM} = \overline{MD}$.

M está en el interior de $\angle ABC$ por el teorema CrossBar Betweenness (1.5.5), por lo tanto

$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = |\angle CAM| + |\angle MAB|$

M está en el interior de $\angle ACD$, luego $|\angle ACD| = \gamma_1 + \gamma_2 = |\angle ACM| + |\angle MCD|$

$\Delta AMB \cong \Delta DMC$ (Aplicando SAS (2.1.10) y Ángulos opuestos por el vértice (2.3.3))

Luego $\angle B \cong \angle MCD \Rightarrow |\angle B| = |\angle MCD| = \gamma_2$

Y también $\angle CDM \cong \angle BAM \Rightarrow |\angle CDM| = |\angle BAM| = \alpha_1$

Ahora

$\sigma ABC = \alpha + |\angle B| + \gamma_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + |\angle B| + \gamma_1 =$

$= |\angle ADC| + \alpha_2 + \gamma_2 + \gamma_1 = |\angle ADC| + \alpha_2 + |\angle C| = \sigma ADC$

Teniendo en cuenta que $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \Rightarrow \alpha_i \leq \alpha/2$ para algún i.

Si $\alpha_1 \leq \alpha/2$ entonces $|\angle ADC| = \alpha_1 \leq \alpha/2$ es uno de los ángulos del triángulo ΔADC.

Si $\alpha_2 \leq \alpha/2$ entonces también se cumple para uno de los ángulos de este triángulo.

En todo caso el triángulo ΔADC cumple las condiciones requeridas.

Nota: Este teorema no se cumple en Geometría Métrica por un modelo de M. Dehn.

5.1.4 Corolario.
Sea ΔABC un triángulo en el cual $|\angle A| = \alpha$. Sea k un entero positivo. Entonces existe otro triángulo ΔXYZ para el cual $\delta ABC = \delta XYZ$ y con un ángulo con medida no superior a $\frac{\alpha}{2^k}$.

Demostración. Basta aplicar el lema 4.1.3 k veces.

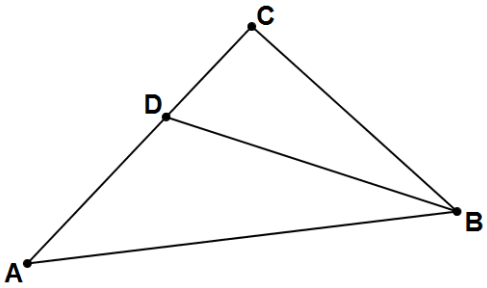
5.1.5 Lema.
Supongamos que para cierto triángulo ΔABC se cumple $\delta ABC < 0$, y sea $\varepsilon = -\delta ABC > 0$. Entonces todo ángulo de ΔABC tiene una medida $\geq \varepsilon$.

Demostración. Supongamos que $|\angle A| < \varepsilon$.
Sabemos que $|\angle B| + |\angle C| < 180$ por 3.5.2.
Luego
$|\angle A| + |\angle B| + |\angle C| < 180 + \varepsilon \Rightarrow$
$|\angle A| + |\angle B| + |\angle C| - 180 < \varepsilon \Rightarrow$
$-\varepsilon < 180 - |\angle A| - |\angle B|.|\angle C| = \delta ABC = -\varepsilon$
absurdo.

5.1.6 Teorema. El teorema Saccheri-Legendre.
En todo triángulo ΔABC se cumple $\delta ABC \geq 0$, es decir $|\angle A| + |\angle B| + |\angle C| \leq 180$

Demostración. Sea ΔABC un triángulo para el cual $\delta ABC = -\varepsilon$, con $\varepsilon > 0$.
Sea $\alpha = |\angle A|$.
La sucesión $\left\{\frac{\alpha}{2^k}\right\}$ tiende a 0, luego existirá un k tal que $\frac{\alpha}{2^k} < \varepsilon$.
Por el lema 4.1.3 existirá un triángulo ΔXYZ para el cual $\sigma ABC = \sigma XYZ$ y con un ángulo, pongamos que sea X, cumpliendo $|\angle X| \leq \frac{\alpha}{2^k} < \varepsilon$, contradiciendo el lema anterior 4.1.5.

5.1.7 Corolario.
Sea ΔABC un triángulo y D un punto tal que A*D*C. Entonces
$\delta ABC = 0 \Leftrightarrow \delta ABD = \delta DBC = 0$.



Demostración. Basta aplicar la proposición 4.1.2, $\delta ABC = \delta ABD + \delta DBC$, y tener en cuenta que los tres valores son positivos.

5.2 Suma angular y defecto de cuadriláteros.

5.2.1 Definición. Suma angular y defecto de un cuadrilátero.
Definimos la suma angular del cuadrilátero $\Diamond ABCD$ por

$$\sigma ABCD = |\angle A| + |\angle B| + |\angle C| + |\angle D|$$

Definimos el defecto del cuadrilátero por

$$\delta ABCD = 360 - \sigma ABCD = 360 - |\angle A| - |\angle B| - |\angle C| - |\angle D|$$

5.2.2 Proposición.
Si $\Diamond ABCD$ es un cuadrilátero regular, entonces $\sigma ABCD = \sigma ABC + \sigma ADC$ y $\delta ABCD = \delta ABC + \delta ADC$. Además $\sigma ABCD \le 360$ y $\delta ABCD \ge 0$

Demostración. Si $\Diamond ABCD$ es un cuadrilátero regular, entonces C está en el interior de $\angle A$ y A está en el interior de $\angle C$ por definición.
Luego $|\angle A| = |\angle BAC| + |\angle CAD|$, y $|\angle C| = |\angle ACB| + |\angle ACD|$ por 3.5.1(a).

$$\sigma ABCD = |\angle A| + |\angle B| + |\angle C| + |\angle D| =$$

$$|\angle BAC| + |\angle B| + |\angle ACB| + |\angle CAD| + |\angle ACD| + |\angle D| =$$

$$\sigma ABC + \sigma ADC$$

$$\delta ABCD = 360 - \sigma ABCD = 360 - (\sigma ABC + \sigma ADC) =$$

$$180 - \sigma ABC + 180 - \sigma ADC =$$

$$= \delta ABC + \delta ADC$$

Aplicando el teorema Saccheri-Legendre (5.1.6), tenemos que el defecto de un cuadrilátero regular es suma de dos cantidades no negativas, luego tampoco será negativa, y la suma angular será siempre menor o igual a 360.

5.2.3 Lema.
Todos los rectángulos son cuadriláteros regulares.

Demostración. Aplicando el teorema de los ángulos alternos (2.6.1) vemos que todo rectángulo es un paralelogramo, y por 1.9.9 todo paralelogramo es regular.

Observación. No hemos demostrado que los rectángulos existan. Nos limitamos a estudiar las propiedades que tendrían dichas figuras si existieran. Se verá más adelante que los rectángulos existen en Geometría euclídea pero no existen en Geometría hiperbólica.

5.2.4 Proposición.
Si $\Diamond ABCD$ es un rectángulo, entonces $\delta ABCD = 0$.

Demostración. Los ángulos rectos miden 90, luego
$\delta ABCD = 360 - |\angle A| - |\angle B| - |\angle C| - |\angle D| = 360 - 4 \cdot 90 = 0$

5.2.5 Corolario.
Si $\Diamond ABCD$ es un rectángulo, entonces ΔABC es un triángulo rectángulo con $\delta ABC = 0$, y ΔADC es un triángulo rectángulo con $\delta ADC = 0$. Por lo tanto, si los rectángulos existen también existirán los triángulos con defecto cero.

Demostración. Sólo hay que aplicar 4.2.2: $\delta ABCD = \delta ABC + \delta ADC$, donde el defecto de un cuadrilátero es la suma de dos cantidades no negativas.

5.2.6 Proposición.
Si $\Diamond ABCD$ es un rectángulo, entonces $\Delta BCA \cong \Delta DAC$.

Demostración. Puesto que ΔABC es un triángulo rectángulo con $\delta ABC = 0$ (4.2.6) entonces

$0 = \delta ABC = 180 - |\angle CAB| - |\angle ABC| - |\angle BCA| =$

$180 - |\angle CAB| - 90 - |\angle BCA| \Rightarrow$

$0 = 90 - |\angle CAB| - |\angle BCA| \Rightarrow$

$90 = |\angle CAB| + |\angle BCA|$

C está en el interior de $\angle BAD$, luego $90 = |\angle DAB| = |\angle DAC| + |\angle CAB|$

Luego

$$\left.\begin{array}{l} 90 = |\angle CAB| + |\angle BCA| \\ 90 = |\angle DAC| + |\angle CAB| \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = |\angle BCA| - |\angle CAD| \Rightarrow |\angle BCA| = |\angle CAD|$$

Por AAS obtenemos que $\Delta BCA \cong \Delta DAC$.

5.2.7 Corolario.
Los lados opuestos de un rectángulo son congruentes.

Demostración. Basta aplicar la proposición anterior.

5.2.8 Proposición. Duplicación de rectángulos.
Supongamos que existe un rectángulo cuyos lados miden x e y. Entonces existirá un rectángulo cuyos lados midan 2x e y.

Demostración.

Sea $\Diamond ABCD$ un rectángulo con $x = |\overline{AB}| = |\overline{CD}|$ e $y = |\overline{BC}| = |\overline{AD}|$.

Sea E un punto tal que E*A*B y $\overline{EA} \cong \overline{AB}$, por lo tanto $|\overline{EB}| = 2x$.

Sea F un punto tal que F*D*C y $\overline{FD} \cong \overline{CD}$, de la misma manera $|\overline{FC}| = 2x$.

Nuestro objetivo es comprobar que el cuadrilátero $\Diamond EBCF$ es un rectángulo.
Los ángulos $\angle EAD$ y $\angle FDA$ serán rectos pues son suplementarios de dos ángulos rectos.
Aplicando SAS tenemos que $\Delta EAD \cong \Delta DAB$, luego $\overline{ED} \cong \overline{DB}$, y $\angle EDA \cong \angle BDA$.
E está en el interior de $\angle FDA$ (ver al final de la demostración)
Luego

$90 = |\angle FDA| = |\angle FDE| + |\angle EDA| \Rightarrow$

$|\angle FDE| = 90 - |\angle EDA| = 90 - |\angle BDA|$

Pero por otro lado, ΔBAD es un triángulo rectángulo con defecto cero, luego

$0 = \delta BAD = 180 - |\angle ADB| - |\angle DAB| - |\angle ABD| =$

$180 - |\angle ADB| - 90 - |\angle ABD| \Rightarrow$

$90 = |\angle ADB| + |\angle ABD| \Rightarrow$

$90 - |\angle ADB| = |\angle ABD|$

Así pues,

$|\angle FDE| = 90 - |\angle BDA| = |\angle ABD|$

Luego $\angle FDE \cong \angle ABD$, y como $\overline{FD} \cong \overline{AB}$ y $\overline{ED} \cong \overline{DB}$, aplicando SAS llegamos a $\Delta FDE \cong \Delta ABD$. Por lo tanto $\angle F$ es recto.

Con un argumento similar se demuestra que $\angle E$ es recto, y por lo tanto $\Diamond EBCF$ es un rectángulo.

Veamos que E está en el interior de $\angle FDA$, es decir $E \approx_{\overrightarrow{AD}} F \wedge E \approx_{\overrightarrow{FD}} A$:

Por hipótesis sabemos que $B \approx_{\overrightarrow{AD}} C$.

$$\left.\begin{array}{l} E*A*B \Rightarrow E \not\approx_{\overrightarrow{AD}} B \Rightarrow E \not\approx_{\overrightarrow{AD}} C \\ F*D*C \Rightarrow F \not\approx_{\overrightarrow{AD}} C \end{array}\right\} \Rightarrow E \approx_{\overrightarrow{AD}} F$$ (aplicando 1.2.17 y axioma B4(b))

Las rectas $\overleftrightarrow{EB}$ y $\overleftrightarrow{FC}$ son perpendiculares comunes a $\overleftrightarrow{AD}$, luego son paralelas (2.6.3), luego el segmento $\overline{EA}$ no puede cortar la recta $\overleftrightarrow{FD}$, luego $E \approx_{\overrightarrow{FD}} A$.

5.2.9 Proposición.

Supongamos que existen los rectángulos. Entonces hay rectángulos arbitrariamente grandes, en el sentido de que para cualquier valor real positivo arbitrariamente grande λ, existirá un rectángulo cuyos lados midan valores mayores o iguales a λ.

Demostración. Sea $\Diamond ABCD$ un rectángulo con $x = |\overline{AB}| = |\overline{CD}|$ e $y = |\overline{BC}| = |\overline{AD}|$, y λ cualquier valor real positivo.

Existirá un entero k tal que $2^k x \geq \lambda$, luego aplicando la proposición anterior k veces llegaremos a un rectángulo con un lado que cumple la propiedad deseada. Ahora basta hacer lo mismo para la altura y, y obtener el rectángulo deseado.

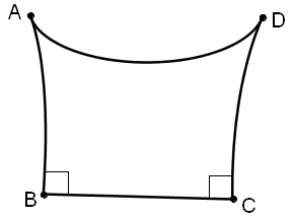
5.2.10 Definición. Cuadrilátero de Saccheri.

Un cuadrilátero de Saccheri es un cuadrilátero $\Diamond ABCD$ que cumple las tres condiciones siguientes:

i) $\angle B$ y $\angle C$ son rectos

ii) $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

iii) A y D son colaterales respecto a $\overleftrightarrow{BC}$.



En este caso diremos que el lado $\overline{BC}$ es la base del cuadrilátero, los ángulos $\angle B$ y $\angle C$ son los ángulos de la base y $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son los lados del cuadrilátero.

Nota histórica.
En 1733 **Girolamo Saccheri** (1667-1733) publicó una pequeña obra titulada *Euclides ab omni noevo vindicatus* (Euclides liberado de toda falla). Saccheri demostró fácilmente, como lo puede hacer un alumno aventajado de secundaria, que si en un cuadrilátero ABCD, los ángulos A y B son rectos, y los lados AD y BC son iguales, entonces los lados D y C son iguales.

5.2.11 Lema.
Con las condiciones anteriores, $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ son rectas paralelas.

Demostración. Ambas rectas son perpendiculares comunes a la misma recta $\overleftrightarrow{BC}$. (3.6.4)

5.2.12 Lema.
Todo cuadrilátero de Saccheri es regular.

Demostración. Es una consecuencia directa de 1.9.13.

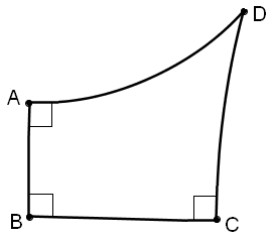
5.2.13 Proposición.
Dados dos números x e y reales positivos, existe un cuadrilátero de Saccheri con base de longitud x y altura de longitud y.

Demostración. Sabemos que existen en el plano al menos tres puntos A, B y C no alineados.
El punto B lo podemos escoger de forma que $x = \left|\overline{AB}\right|$.
Lanzamos sendas perpendiculares $s_1 = \overrightarrow{AC}$ y $s_2 = \overrightarrow{BD}$ por A y B de forma que C y D son colaterales respecto $\overleftrightarrow{AB}$.
Los puntos C y D los podemos escoger de forma que $y = \left|\overline{AC}\right| = \left|\overline{BD}\right|$.
El cuadrilátero $\Diamond ABCD$ cumplirá las condiciones deseadas.
Los detalles de la demostración quedan como ejercicio.

5.2.14 Proposición.
Sea $\Diamond ABCD$ un cuadrilátero de Saccheri con ángulos rectos $\angle B$ y $\angle C$.
Entonces $\angle A \cong \angle D$ y ambos son agudos o rectos. (Si son rectos entonces $\Diamond ABCD$ será un rectángulo).

Demostración. $\Delta ABC \cong \Delta DCB$ por SAS, luego $\overline{AC} \cong \overline{BD}$, por tanto $\Delta BAD \cong \Delta CDA$ por SSS, y en consecuencia $\angle A \cong \angle D$.
$0 \le \delta ABCD = 360 - |\angle A| - |\angle B| - |\angle C| - |\angle D| =$
$= 360 - |\angle A| - 90 - 90 - |\angle A| =$
$= 180 - 2|\angle A| \Rightarrow$
$2|\angle A| \le 180 \Rightarrow |\angle A| \le 90$

5.2.15 Definición. Cuadrilátero de Lambert.
Un cuadrilátero de Lambert es un cuadrilátero con al menos tres ángulos rectos.



Nota histórica.
El matemático alemán **Johann Heinrich Lambert** (1728–1777) escribió, treinta años después de la publicación de Saccheri (1733), una investigación semejante titulada *Die Theorie der Parallellinien* (La teoría de las paralelas) que, inexplicablemente, no se publicó hasta once años después de su muerte. Lambert eligió un cuadrilátero que contenía tres ángulos rectos (la mitad de un cuadrilátero de Saccheri) como su figura, y consideró las tres posibles hipótesis para el cuarto ángulo: agudo, recto u obtuso.

5.2.16 Lema.
Todo cuadrilátero de Lambert es un paralelogramo, y por tanto es regular.

Demostración. Basta aplicar el teorema de las dobles perpendiculares.

5.2.17 Proposición.
Sea $\Diamond ABCD$ un cuadrilátero de Lambert con ángulos rectos $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$. Entonces $\angle D$ será agudo o recto.

Demostración.

Puesto que es regular,
$\sigma ABCD = |\angle A| + |\angle B| + |\angle C| + |\angle D| \leq 360 \Rightarrow$
$90 + 90 + 90 + |\angle D| \leq 360 \Rightarrow$
$270 + |\angle D| \leq 360 \Rightarrow$
$|\angle D| \leq 90$
Y aplicamos 3.5.1(c) i 3.5.1(d).

5.2.18 Proposición.
Sea $\Diamond ABCD$ un cuadrilátero de Lambert con ángulos rectos $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$ y supongamos $\angle D$ agudo.
Entonces $\overline{AB} > \overline{CD}$ y $\overline{DA} > \overline{BC}$

Demostración. Veamos que $\overline{AB} > \overline{CD}$.
Supongamos que $\overline{AB} \leq \overline{CD}$. Entonces $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ o $\overline{AB} < \overline{CD}$.
En el primer caso $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ implica que $\Diamond ABCD$ es un cuadrilátero de Saccheri, luego $\angle A \cong \angle D$, llegando a contradicción.
En el segundo caso $\overline{AB} < \overline{CD}$, entonces existirá un punto C*E*D tal que $\overline{AB} \cong \overline{CE}$.
Luego $\Diamond ABCE$ será un cuadrilátero de Saccheri, y por tanto $\angle EAB \cong \angle AEC$.
Aplicando el teorema del ángulo exterior, $\angle AEC > \angle D$, pero $\angle D > \angle A = \angle BAD$ que es agudo. Luego $\angle AEC > \angle BAD$. Pero E está en el interior de $\angle BAD$, luego

$\angle BAE < \angle BAD$ y por lo tanto $\angle AEC > \angle BAE$, contradiciendo la observación anterior $\angle EAB \cong \angle AEC$.
La segunda desigualdad se demuestra de forma similar.

5.2.19 Proposición.
Sea $\Diamond ABCD$ un cuadrilátero de Saccheri con ángulos rectos $\angle B$ y $\angle C$.
Sea M el punto medio de $\overline{AD}$ y N el punto medio de $\overline{BC}$. Entonces $\angle AMN$ y $\angle BNM$ son rectos. En particular, $\Diamond ABNM$ y $\Diamond MNCD$ son cuadriláteros de Lambert.

Demostración. $\Delta ABN \cong \Delta DCN$ por SAS, luego $\overline{AN} \cong \overline{DN}$.
$\Delta AMN \cong \Delta DNM$ por SSS, luego $\angle AMN$ es recto, pues es congruente con su complementario $\angle DMN$.
$\angle A \cong \angle D$ por 4.2.15, y por lo tanto $\Delta BAM \cong \Delta CDM$ por SAS, y en consecuencia $\overline{BM} \cong \overline{MC}$.
Ahora $\Delta BMN \cong \Delta CMN$ por SSS, y por lo tanto $\angle BNM \cong \angle CNM$, es decir, $\angle BNM$ es un ángulo recto (pues es congruente con su suplementario).

5.2.20 Corolario.
Sea $\Diamond ABCD$ un cuadrilátero de Saccheri con ángulos rectos $\angle B$ y $\angle C$.
Supongamos que $\Diamond ABCD$ no es un rectángulo. Entonces $\overline{AD} > \overline{BC}$.

Demostración.
Puesto que $\Diamond ABCD$ no es un rectángulo, $\angle A$ será agudo. Sean M y N como en la proposición anterior. Entonces $\Diamond ABCD$ es un cuadrilátero de Lambert, y por 4.2.19 tenemos que $\overline{AM} > \overline{BN}$, por lo que $\overline{AD} > \overline{BC}$.

5.2.21 Corolario.
Todos los cuadriláteros de Saccheri son paralelogramos.

Demostración. Sea $\Diamond ABCD$ un cuadrilátero de Saccheri con ángulos rectos $\angle B$ y $\angle C$.
Sea M y N como en las proposiciones anteriores. Entonces $\overleftrightarrow{MN}$ es perpendicular a $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{BC}$. Luego $\overleftrightarrow{AD} // \overleftrightarrow{BC}$. Y de la misma forma, puesto que $\overleftrightarrow{BC}$ es perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$.

5.2.22 Lema.
Sea $\Diamond ABCD$ un cuadrilátero con ángulos rectos $\angle B$ y $\angle C$, y tal que A y D son colaterales respecto de $\overleftrightarrow{BC}$. Entonces $\overline{AB} > \overline{DC} \Rightarrow \angle A < \angle D$.

Demostración. Sea A' un punto tal que B*A'*A y $\overline{BA'} \cong \overline{DC}$. Entonces $\Diamond A'BCD$ es un cuadrilátero de Saccheri, y por tanto por 4.2.15 $\angle BA'D \cong \angle A'DC$.
Pero $\angle ADC > \angle A'DC$, puesto que A' está en el interior de $\angle ADC$ (Se demuestra al final) luego $\angle A < \angle BA'D$ por el teorema del ángulo exterior, y entonces $\angle A < \angle BA'D \cong \angle A'DC < \angle ADC = \angle D$.
Veamos que A' está en el interior de $\angle ADC$: $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ pues ambas rectas son perpendiculares a $\overleftrightarrow{BC}$ (2.6.3). Luego aplicando 1.9.12 tenemos que $\Diamond ABCD$ es regular, luego B está en el interior de $\angle ADC$ (1.9.5iv). Entonces, puesto que A*A'*B, tenemos

que A’ pertenecerá al interior de $\angle ADB$ (1.5.6), pero entonces pertenecerá al interior de $\angle ADC$ por 1.7.5.

5.3 Las condiciones euclidianas principales.

5.3.1 Postulado. Existencia de una única paralela (PUP).

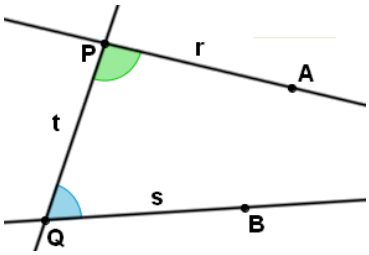
Dada una recta r y un punto P que no pertenece a r, existirá una única recta por P paralela a r.

Un plano euclídeo es un plano neutro que además cumple PUP, o cualquier postulado equivalente al mismo.

Nota histórica.
Este postulado se conoce también como "**Postulado Playfair**" y se debe al físico y matemático escocés John Playfair (1748–1819), aunque ya había sido estudiado por Proclo en el siglo V.

5.3.2 Postulado. Quinto postulado de Euclides (PQE).

Supongamos que:
i) $r = \overleftrightarrow{PA}$ y $s = \overleftrightarrow{QB}$ diferentes, con $P \neq Q$.
ii) A y B están en el mismo lado respecto a $t = \overleftrightarrow{PQ}$.
iii) $|\angle APQ| + |\angle BQP| < 180$
Entonces r y s se cortan en un punto C que está en el mismo lado respecto a t que A y B.



5.3.3 Proposición.

$$\text{PQE} \Rightarrow \text{PUP}$$

Demostración. Sea r una recta y $P \notin r$.
Trazamos la perpendicular t a r por P. Sea Q el punto de intersección con r.
Trazamos la perpendicular s a t por P.
$s \,//\, r$, puesto que ambas rectas son perpendiculares a t (3.6.4)
Queremos ver que s es la única recta paralela a r por P.
Supongamos que s_2 es otra recta paralela a r por P.
Tomamos puntos X e Y de s_2 tales que X*P*Y (Axioma B2)
Uno de los ángulos $\angle XPQ$ o $\angle YPQ$ tiene que ser agudo, puesto que no son rectos y son suplementarios.
Luego la suma angular será menor de 180, y aplicando 5.3.2 tenemos que s_2 corta a r en algún punto C, luego no son paralelas.

5.3.4 Proposición.

$$\text{PUP} \Rightarrow \text{PQE}$$

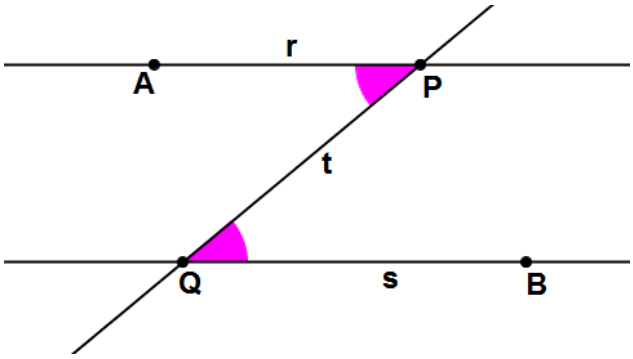
Demostración. Sean $r = \overleftrightarrow{PA}$, $s = \overleftrightarrow{QB}$ dos rectas diferentes, con $P \neq Q$.
A y B están en el mismo lado respecto a $t = \overleftrightarrow{PQ}$.

$|\angle APQ|+|\angle BQP|<180$

Por el axioma B2 existirá un punto D tal que D*Q*B
$\angle PQD = 180 - \angle PQB$ por ser ángulos suplementarios.
Luego $|\angle PQD| \neq |\angle APQ|$ (porque entonces
$|\angle APQ|+|\angle BQP| = |\angle PQD|+|\angle BQP| = 180 - |\angle BQP|+|\angle BQP| = 180$,
contradiciendo la hipótesis)
Por lo tanto, existirá una semirrecta $\overrightarrow{PX}$ tal que $\angle PQD \equiv \angle XPQ$, y con X en el mismo lado que A respecto a t.
Sea $r_2 = \overleftrightarrow{PX}$. Entonces $r_2 \,//\, s$ por el Teorema de los ángulos internos alternos (2.6.1)
Por lo tanto, aplicando PUP, r no puede ser paralela a s.
Sea $C = r \cap s$. Sólo queda ver que C está en el mismo lado que A respecto a t.
Supongamos, por lo contrario, que C y A están en lados opuestos.
Entonces tenemos un triángulo ΔCPQ en el cual $\angle CPQ$ y $\angle APQ$ son suplementarios, $\angle CQP$ y $\angle BQP$ son suplementarios, y por hipótesis, $|\angle APQ|+|\angle BQP|<180$, luego
$|\angle CPQ|+|\angle CQP| = 180 - |\angle APQ|+180 - |\angle BQP| = 360 - (|\angle APQ|+|\angle BQP|) > 180$
Contradiciendo 3.5.2.

5.3.5 Postulado. Recíproco del teorema de los ángulos internos alternos (PRA).
Dadas dos rectas paralelas r y s, y una recta transversal t, los ángulos internos alternos son congruentes.

Más detalladamente: Sean $r = \overleftrightarrow{PA}$, $s = \overleftrightarrow{QB}$ dos rectas paralelas, y $t = \overleftrightarrow{PQ}$. Supongamos que A y B están en lados opuestos respecto de la recta t. Entonces $\angle APQ \cong \angle BQP$.



Observación: El recíproco es un teorema de geometría métrica (3.6.2)

5.3.6 Proposición.

$$\text{PUP} \Rightarrow \text{PRA}$$

Demostración. Sean $r = \overleftrightarrow{PA}$, $s = \overleftrightarrow{QB}$ dos rectas paralelas, y $t = \overleftrightarrow{PQ}$. Supongamos que A y B están en lados opuestos respecto de la recta t.
Existirá un punto A' en el mismo lado que A respecto de t tal que $\angle A'PQ \cong \angle BQP$.
Sea $r_2 = \overleftrightarrow{PA'}$. Ahora podemos aplicar el Teorema de los ángulos internos alternos (2.6.1) para asegurar que $r_2 \,//\, s$, pero entonces aplicando la hipótesis PUP, tenemos que $r_2 = r$, por lo que $\angle APQ = \angle A'PQ \cong \angle BQP$.

5.3.7 Proposición.

$$\text{PRA} \Rightarrow \text{PUP}$$

Demostración. Sea r una recta y $P \notin r$.
Trazamos la perpendicular t a r por P. Sea Q el punto de intersección con r.
Trazamos la perpendicular s a t por P.
$s // r$, puesto que ambas rectas son perpendiculares a t (2.6.3)
Supongamos que existe otra recta s_2 paralela a r.
Aplicando PRA, tenemos que $s_2 \perp t$, luego $s = s_2$ por la unicidad de la recta perpendicular.

5.3.8 Postulado. Postulado de Proclus (PDP).
Si $r // s$ y t corta a r, entonces t corta a s.

5.3.9 Proposición.

$$\text{PUP} \Rightarrow \text{PDP}$$

Demostración. Sea una recta r paralela a s, y sea $P = r \cap t$. Por P sólo puede pasar una única paralela a s, luego t no puede ser paralela a s, es decir, t corta a s.

5.3.10 Proposición.

$$\text{PDP} \Rightarrow \text{PUP}$$

Demostración. Sea r una recta y $P \notin r$.
Trazamos la perpendicular t a r por P. Sea Q el punto de intersección con r.
Trazamos la perpendicular s a t por P.
$s // r$, puesto que ambas rectas son perpendiculares a t (2.6.3)
Sea s_2 cualquier otra recta que pasa por P.
Puesto que s_2 corta a s, aplicando PDP deducimos que s_2 corta a r, es decir, existe una única paralela a r.

5.3.11 Postulado. Transitividad del paralelismo (PTP).
Sean r, s y t tres rectas diferentes. Si $r // s$ y $s // t$, entonces $r // t$.

5.3.12 Proposición.

$$\text{PDP} \Rightarrow \text{PTP}$$

Demostración. Sean r, s y t tres rectas diferentes, y supongamos que $r // s$ y $s // t$.
Supongamos que r y t no son paralelas.
Aplicando PDP deducimos que si r corta a t, entonces r también tiene que cortar a s, contradiciendo la hipótesis $r // s$.

5.3.13 Proposición.

$$\text{PTP} \Rightarrow \text{PDP}$$

Demostración. Sea $r // s$ y supongamos que t corta la recta r.
Supongamos que t fuera paralela a s. Entonces aplicando PTP tendríamos que r es paralela a s, contradiciendo la hipótesis que t corta r.

5.3.14 Postulado. Postulado de la suma de los ángulos de un triángulo (PSA). "Angle sum theorem".
Todos los triángulos tienen defecto cero, o equivalentemente, en todo triángulo ΔABC se cumple $|\angle A| + |\angle B| + |\angle C| = 180$.

Recordemos que en todo plano neutro se cumple que todos los triángulos tienen defecto ≥ 0, por el Teorema Saccheri-Legendre (4.1.6).

5.3.15 Proposición.

$$\text{PSA} \Rightarrow \text{PUP}$$

Demostración. Sea una recta r y $P \notin r$.
Trazamos una perpendicular m a r por P. Sea Q el pie de esta perpendicular en r. Sea s la recta perpendicular a m por P. Sabemos que $s // r$ por ser ambas perpendiculares a m.
Supongamos que existe otra recta s_2 paralela a r por P.
Sea C un punto de s_2 que sea colateral con Q respecto a s.
Trazamos por C una perpendicular a m. Sea B el punto de intersección entre dicha perpendicular y m. Así pues, ΔPCB será un triángulo rectángulo en $\angle B$.
Sea ahora un punto C_1 tal que $P * C * C_1$ y $\overline{PC} \cong \overline{CC_1}$, y por lo tanto $|\overline{PC_1}| = 2|\overline{PC}|$.
Trazamos ahora una perpendicular por C_1 a m, y sea B_1 su punto de intersección con m. Así pues, ΔPC_1B_1 será un triángulo rectángulo en $\angle B_1$.
P y C_1 están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{BC}$, luego $P * B * B_1$. Ahora podemos aplicar el lema 2 para concluir que $|\overline{PB_1}| = 2|\overline{PB}|$.
Repitiendo este proceso podemos obtener una sucesión de puntos $C_1, C_2, \ldots$ y $B_1, B_2, \ldots$ tal que $|\overline{PB_k}| = 2^k |\overline{PB}|$.
Aplicando el Principio Arquimediano, existirá un k suficientemente grande para el cual $|\overline{PB_k}| > |\overline{PQ}|$.
Puesto que $\overleftrightarrow{B_kC_k} // r$, tenemos $B_k \approx_r C_k$. Así pues, P y C_k están en lados opuestos de r, por lo cual r corta a $\overline{PC_k}$. Pero $s_2 = \overleftrightarrow{PC_k}$, luego s_2 y r no pueden ser paralelas.

5.3.16 Teorema. (Elementos 1.32)

$$\text{PRA} \Rightarrow \text{PSA}$$

y el postulado PRA es equivalente a que el ángulo exterior a un vértice de un triángulo es igual a la suma de sus dos ángulos interiores opuestos.

Demostración. Sea ΔABC un triángulo. Prolongamos $\overline{BC}$ con un punto D y sea $\overleftrightarrow{CE}$ la única recta paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ por C (En 4.3.7 se ha demostrado que PRA $\Rightarrow$ PUP).
Tomamos E de forma que esté en el interior de $\angle ACD$.
Aplicando PRA (y en 4.3.6 hemos demostrado que PUP $\Rightarrow$ PRA) tenemos que $\angle ECA \cong \angle A$ y $\angle DCE \cong \angle B$.
Luego $|\angle DCA| = |\angle DCE| + |\angle ECA| = |\angle B| + |\angle A|$.

Por otro lado, $\sigma ABC = |\angle A| + |\angle B| + |\angle C| = |\angle DCA| + |\angle ACB| = 180^o$
por ser ángulos suplementarios.

Por otro lado, si suponemos que $|\angle DCA| = |\angle B| + |\angle A|$, entonces claramente
$180^o = |\angle DCA| + |\angle ACB| = |\angle B| + |\angle A| + |\angle C|$.

5.3.17 Teorema.

$$\text{PSA} \Rightarrow \text{PRA}$$

Demostración. PSA $\Rightarrow$ PUP por 4.3.15, y PUP $\Rightarrow$ PRA por 4.3.6.

5.3.18 Plano euclídeo.
Llamaremos plano euclídeo a todos los resultados que se pueden obtener añadiendo el postulado PUP (4.3.1), o cualquier postulado equivalente a éste, a un plano neutro.

5.3.19 Proposición.
En un plano euclídeo, si A, B, C y D son cuatro puntos tales que
i) A, B, C no son colineales y D está en el interior de $\angle ABC$
ii) A, D y C no son colineales y B está en el interior de $\angle ADB$
Entonces $|\angle DAB| + |\angle ABC| + |\angle BCD| + |\angle CDA| = 360$.

Demostración. Por 1.9.7 el cuadrilátero $\Diamond ABCD$ es regular, luego por 4.2.2 y PSA se cumple $\sigma ABCD = \sigma ABC + \sigma ADC = 180 + 180 = 360$.

5.3.20 Teorema. Teorema de los ángulos internos alternos.
En un plano euclídeo, dadas dos rectas r y s, y una recta transversal t, las rectas r y s serán paralelas si y sólo si los ángulos internos alternos son iguales.

Demostración. $\Rightarrow$ es 4.3.6, y $\Leftarrow$ es 2.6.1.

5.3.21 Proposición.
En un plano euclídeo, un cuadrilátero $\Diamond ABCD$ es paralelogramo si y sólo si sus lados opuestos son iguales.

Demostración. Sea un cuadrilátero $\Diamond ABCD$. Queremos ver $\left.\begin{matrix}\overleftrightarrow{AD} \,//\, \overleftrightarrow{BC} \\ \overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{CD}\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\overline{AD} \cong \overline{BC} \\ \overline{AB} \cong \overline{CD}\end{matrix}\right.$.

Trazamos la diagonal $\overleftrightarrow{BD}$ para obtener dos triángulos ΔDAB y ΔDCB.
Supongamos que $\overleftrightarrow{AD} \,//\, \overleftrightarrow{BC} \wedge \overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{CD}$. $\overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{CD} \Rightarrow \angle ABD \cong \angle BDC$, y
$\overleftrightarrow{AD} \,//\, \overleftrightarrow{BC} \Rightarrow \angle ADB \cong \angle DBC$ por PRA.
Luego $\Delta DAB \cong \Delta DCB$ por ASA, de lo que deducimos que $\overline{AD} \cong \overline{BC} \wedge \overline{AB} \cong \overline{CD}$.
Supongamos ahora que $\overline{AD} \cong \overline{BC} \wedge \overline{AB} \cong \overline{CD}$. Entonces $\Delta DAB \cong \Delta DCB$ por SSS (2.8.4) y aplicando AIA tenemos que $\angle ADB \cong \angle DBC \Rightarrow \overleftrightarrow{AD} \,//\, \overleftrightarrow{BC}$ y
$\angle ABD \cong \angle BDC \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{CD}$.

5.4 El teorema del Defecto Cero de Legendre.

En esta sección vamos a probar el teorema del Defecto Cero de Legendre: Si existe un triángulo con defecto cero, entonces todos los triángulos tienen defecto cero.

5.4.1 Proposición.
Si existe un triángulo con defecto cero, entonces existe un triángulo rectángulo con defecto cero.

Demostración. Sea ΔABC un triángulo tal que $\delta ABC = 0$. Por el lema 2.7.12 sabemos que ΔABC tiene dos ángulos agudos. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que son $\angle A$ y $\angle C$. Trazamos la perpendicular a $\overleftrightarrow{AC}$ por el vértice B. Sea F su punto de intersección con $\overleftrightarrow{AC}$. Por el lema 2.7.11 tenemos que A*F*C. El triángulo ΔAFB es rectángulo en F y cumple $\delta AFB = 0$ por 4.1.7.

5.4.2 Proposición.
Si existe un triángulo con defecto cero, entonces existe un rectángulo.

Demostración. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en $\angle A$. Supongamos que $\delta ABC = 0$, entonces $|\angle ACB| + |\angle ABC| = 90 \Rightarrow |\angle ACB| = 90 - |\angle ABC|$.
Trazamos por C una recta $\overleftrightarrow{CD}$ perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ tal que B y D estén al mismo lado de $\overleftrightarrow{AC}$. Podemos suponer además que $\overline{CD} = \overline{AB}$. Las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ son paralelas pues son perpendiculares comunes a $\overleftrightarrow{AC}$. El cuadrilátero $\Diamond ABCD$ es un cuadrilátero de Saccheri y por tanto es regular (4.2.13), luego B está en el interior de $\angle ACD$. Así pues $|\angle ACB| + |\angle BCD| = |\angle ACD| = 90$. Pero $|\angle ACB| = 90 - |\angle ABC|$, luego
$90 - |\angle ABC| + |\angle BCD| = 90 \Rightarrow -|\angle ABC| = |\angle BCD| \Rightarrow$
$\Rightarrow |\angle ABC| = |\angle BCD| \Rightarrow \angle ABC \cong \angle BCD$
Entonces, por SAS deducimos que $\Delta ABC \cong \Delta BCD$, y por tanto $\angle D \cong \angle A$ es un ángulo recto, $\angle ABC \cong \angle DCB$ y $\angle CBD \cong \angle ACB$.
Finalmente, puesto que $\Diamond ABCD$ es regular, C está en el interior de $\angle ABD$, y $|\angle ABD| = |\angle ABC| + |\angle CBD| = |\angle DCB| + |\angle ACB| = 90$. Luego todos los ángulos son rectos, y por lo tanto es un rectángulo.

5.4.3 Proposición.
Sea ΔXYZ un triángulo rectángulo con ángulo recto $\angle X$. Sea M el máximo de $|\overline{XY}|$ y $|\overline{XZ}|$. Supongamos que existe un rectángulo $\Diamond ABCD$ cuyos lados tienen longitudes mayores que M. Entonces $\delta XYZ = 0$.

Demostración.
Supongamos que $\overline{XY} < \overline{AB}$ y $\overline{XZ} < \overline{AB}$. Entonces existirán puntos A*Y'*B y A*Z'*D tales que $\overline{XY} \cong \overline{AY'}$ y $\overline{XZ} \cong \overline{AZ'}$.
Puesto que $\Diamond ABCD$ es un rectángulo, $\delta ABCD = 0$ (4.2.5). Y puesto que $\delta ABCD = \delta ABD + \delta BCD$, tenemos que $\delta ABD = 0$. Pero A*Y'*B, luego $\delta ABD = \delta AY'D + \delta Y'BD$, y por tanto $\delta AY'D = 0$.

Por último y de la misma manera, puesto que A*Z'*D,
$0 = \delta AY'D = \delta AY'Z' + \delta Y'Z'D \Rightarrow \delta AY'Z' = 0$.
Pero $\Delta XYZ \cong \Delta AY'Z'$ (por SAS), así que $\delta XYZ = 0$.

5.4.4 Proposición.
Supongamos que todo triángulo rectángulo tiene defecto cero. Entonces todo triángulo tiene defecto cero.

Demostración. Sea ΔABC un triángulo. Este triángulo tiene dos ángulos agudos por 2.7.12. Supongamos que sean $\angle A$ y $\angle C$. Trazamos la perpendicular a $\overleftrightarrow{AC}$ por el vértice B. Sea F su punto de intersección con $\overleftrightarrow{AC}$. Por el lema 2.7.11 tenemos que A*F*C. Los triángulos ΔAFB y ΔCBF son triángulos rectángulos .
Por último $\delta ABC = \delta AFB + \delta CBF = 0 + 0 = 0$.

5.4.5 Corolario. El teorema del Defecto Cero de Legendre.
Si existe un triángulo con defecto cero, entonces todos los triángulos tienen defecto cero.

Demostración. Supongamos que existe un triángulo con defecto cero. Entonces por 4.4.1 existirá un triángulo rectángulo con defecto cero. Luego por 4.4.2 existirá un rectángulo. Este rectángulo lo podemos hacer arbitrariamente grande por la proposición 4.2.9. Luego por 4.4.3 todos los triángulos rectángulos tendrán defecto cero. Por último, por 4.4.4 todos los triángulos tendrán defecto cero.

5.4.6 Corolario.
Si existe un triángulo con defecto cero, entonces existe un rectángulo.

Demostración.
Es la primera parte de la demostración anterior 4.4.5.

5.4.7 Corolario.
Si existen los rectángulos, todos los triángulos tienen defecto cero.

Demostración. Es la segunda parte de la demostración de 4.4.5.

5.4.8 Corolario.
Si existe un triángulo con defecto cero, entonces todos los cuadriláteros regulares tienen defecto cero.

Demostración. Todos los triángulos tendrán defecto cero por 4.4.5. Sea $\Diamond ABCD$ un cuadrilátero regular. Entonces, por 4.2.2, $\delta ABCD = \delta ABD + \delta BCD = 0 + 0 = 0$.

Los siguientes corolarios sientan las bases para la geometría hiperbólica:

5.4.9 Corolario.
Si existe un triángulo con defecto positivo, entonces todos los triángulos tienen defecto positivo.

Demostración. Si existe un triángulo con defecto cero, entonces por 4.4.5 todos los triángulos tendrían defecto cero, contradiciendo la hipótesis.

5.4.10 Corolario.
Si existe un triángulo con defecto positivo, entonces no existen rectángulos.

Demostración. Si existen rectángulos todos los triángulos tienen defecto cero por 5.4.7, contradiciendo la hipótesis.

5.4.11 Corolario.
Si no existen rectángulos, todos los triángulos tienen defecto positivo.

Demostración. Supongamos que exista algún triángulo con defecto cero. Entonces, por 4.4.6, existirá un rectángulo, contradiciendo la hipótesis.

5.5 Otras Condiciones euclídeas.

5.5.1 Postulado. Existencia de un triángulo con defecto cero (PET).
Existe al menos un triángulo con defecto cero.

5.5.2 Teorema. PET es una condición euclídea.

$$\text{PET} \Leftrightarrow \text{PUP}$$

Demostración. Si existe un triángulo con defecto cero, entonces todos los triángulos tienen defecto cero por 4.4.5, y si los triángulos tienen defecto cero, entonces se cumple PUP por 4.3.15. Recíprocamente, Si PUP entonces todos los triángulos tienen defecto cero por 4.3.16, luego existirá algún triángulo con defecto cero (pues los triángulos existen pues existen tres puntos no colineales por el axioma I3).

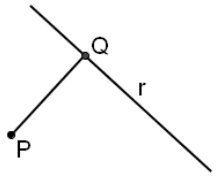
5.5.3 Postulado. Existencia de rectángulos (PER).
Existe al menos un rectángulo.

5.5.4 Teorema. PER es una condición euclídea.

$$\text{PER} \Leftrightarrow \text{PUP}$$

Demostración. Si existen los rectángulos, entonces todos los triángulos tienen defecto cero por 4.4.7. Recíprocamente, si se cumple PSA, entonces al menos un triángulo tiene defecto cero, y por tanto, por 4.4.6, existirá un rectángulo.

5.5.5 Definición. Distancia de un punto a una recta.
Sea $P \notin r$. Definimos la distancia de P a r, y escribiremos dist(P,r), como la longitud del segmento $\overline{PQ}$, donde Q es la proyección ortogonal de P en r (2.5.7).



5.5.6 Proposición.
Sea $P \notin r$. Entonces $dist(P,r) \leq \left|\overline{PQ'}\right| \quad \forall Q' \in r$, y $dist(P,r) = \left|\overline{PQ'}\right| \wedge Q' \in r \Rightarrow Q' = Q$, donde Q es la proyección ortogonal de P en r. Es decir, la proyección ortogonal de P en r es el punto de la recta más próximo a P.

Demostración. Sea $Q' \in r, Q' \neq Q$. Consideremos el triángulo $\Delta PQQ'$. Es un triángulo rectángulo en Q, luego $\angle Q'$ es agudo (2.7.5)
Por lo que $\angle Q' < Q$ y por tanto $\overline{PQ'} > \overline{PQ}$ (2.7.6)
Supongamos que existe un $Q' \in r, Q' \neq Q$, para el cual $\overline{PQ'} \cong \overline{PQ}$. El triángulo $\Delta PQQ'$ sería isósceles en P, luego $\angle Q' \cong \angle Q$ recto, llegando a contradicción pues forzosamente en un triángulo rectángulo $\angle Q'$ ha de ser agudo.

5.5.7 Postulado. Equidistancia entre rectas paralelas (PEP).
Dadas dos rectas paralelas r y s, todos los puntos de r están a la misma distancia de s.

5.5.8 Lema.
Supongamos que existen dos rectas paralelas r y s y tres puntos diferentes P, Q y R en r equidistantes a s. Entonces existen los rectángulos.

Demostración. Supongamos $r // s$, $P,Q,R \in r$, diferentes.
Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, $P*Q*R$.
Sea A, B y C las proyecciones perpendiculares de P, Q y R respectivamente.
A, B y C serán puntos diferentes pues las rectas perpendiculares a cada punto son diferentes.
Por hipótesis, $\overline{PA} \cong \overline{QB} \cong \overline{RC}$, luego $\Diamond PABQ$ es un cuadrilátero de Saccheri, y por lo tanto $|\angle APQ| = |\angle BQP| \leq 90$ (3.7.15).
Y también $\Diamond QBCR$ es un cuadrilátero de Saccheri, y por lo tanto $|\angle BQR| = |\angle CRQ| \leq 90$.
Por otro lado, $\angle BQP$ y $\angle BQR$ son suplementarios, luego $|\angle BQP| + |\angle BQR| = 180$.
Para que esto suceda, la única posibilidad es $|\angle BQP| = |\angle BQR| = 90$, luego $|\angle APQ| = |\angle BQP| = 90$, es decir, $\Diamond PABQ$ es un rectángulo.
Ahora, aplicando 3.7.8 llegamos a $\overline{AF} \cong \overline{BG}$.

5.5.9 Proposición. PEP es una condición euclídea.

$$\text{PEP} \Leftrightarrow \text{PUP}$$

Demostración. Veamos PEP $\Rightarrow$ PUP. Si se cumple PEP, entonces por el lema anterior 4.5.6 existen los rectángulos. Pero la existencia de rectángulos es una condición euclídea por 4.5.2.
Veamos ahora PUP $\Rightarrow$ PEP. Sean dos rectas paralelas r y s. Y sean A y B dos puntos diferentes de r.
Sean A' y B' las proyecciones perpendiculares de A y B en s, respectivamente.
Luego $\angle AFG$ y $\angle FGB$ son rectos, y $\overline{AF} \cong \overline{BG}$.
Sea r' una recta perpendicular a $\overleftrightarrow{AF}$ y que pase por A. Las rectas r' y s serán paralelas pues ambas son perpendiculares comunes a $\overleftrightarrow{AF}$. Por PUP, $r = r'$, y por tanto $\angle FAB$ será también recto.
De la misma forma demostramos que $\angle ABG$ es recto, luego $\Diamond AFGB$ será un rectángulo.

5.5.10 Lista ampliada de Condiciones euclídeas.

(1) PUP. Existencia de una única paralela (5.3.1)
(2) PQE. Quinto postulado de Euclides (5.3.2)
(3) PRA. Recíproco del teorema de los ángulos internos alternos (5.3.5)
(4) PDP. Postulado de Proclus (5.3.8)
(5) PTP. Transitividad del paralelismo (5.3.11)
(6) PSA. Postulado de la suma de los ángulos internos de un triángulo (5.3.14)
(7) PER. Existencia de rectángulos (5.5.3)
(8) PET: Existencia de un triángulo con defecto cero (5.5.1)
(9) PEP: Equidistancia entre rectas paralelas (5.5.7)
(10) WallisHyp. Similar triangles exist of arbitrary size.
(11) $Big\Delta$. Triangles of arbitrarily large areas exist.
(12) CrossbarHyp. Crossbars exist through arbitrary points.
(13) 3ptCircle. A circle exists containing three given non-collinear points.
(14) AlTusiHyp. Al-Tusi Hypothesis (for decreasing length segments).

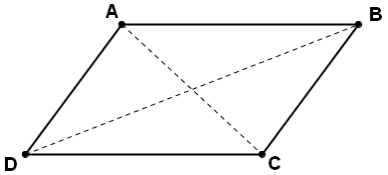
6 Paralelogramos.

6.1 Paralelogramos.

6.1.1 Definición. Paralelogramo ("Parallelogram").

Un paralelogramo es un cuadrilátero $\Diamond ABCD$ en el que los lados opuestos son paralelos, es decir, la recta $\overleftrightarrow{AB}$ es paralela a $\overleftrightarrow{BC}$ y la recta $\overleftrightarrow{AD}$ sea paralela a $\overleftrightarrow{BC}$.

Se comprueba fácilmente que entonces C y D están en el mismo semiplano respecto a $\overleftrightarrow{AB}$, A y B están en el mismo semiplano respecto a $\overleftrightarrow{CD}$, A y D están en el mismo semiplano respecto a $\overleftrightarrow{BC}$ y B y C están en el mismo semiplano respecto a $\overleftrightarrow{AD}$.

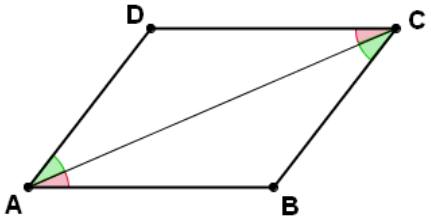


6.1.2 Teorema. Caracterización de los paralelogramos.

En un plano euclídeo son equivalentes:
a) El cuadrilátero $\Diamond ABCD$ es un paralelogramo.
b) Cada diagonal determina dos triángulos congruentes. (Elementos 1.34)
c) Los lados opuestos son congruentes. (Elementos 1.34)
d) Los ángulos opuestos son congruentes. (Elementos 1.34)
e) Las diagonales se cortan por su punto medio.

Nota: Para las caracterizaciones c) y d) estamos suponiendo que trabajamos con cuadriláteros simples.

Demostración:
$a \Rightarrow b$) Trazamos la diagonal $\overline{AC}$, y consideramos los triángulos ΔADC y ΔABC. Los ángulos $\angle DCA$ y $\angle BAC$ son congruentes, pues son los ángulos internos alternos determinados por dos rectas paralelas (5.3.5). De la misma forma los ángulos $\angle DAC$ y $\angle ACB$ son congruentes, y se cumple trivialmente $\overline{AC} \cong \overline{AC}$, luego $\Delta ADC \cong \Delta ABC$ por el criterio ASA.



$a \Rightarrow c$) De $\Delta ADC \cong \Delta ABC$ se deduce directamente $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ y $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

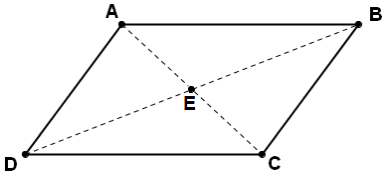
$a \Rightarrow d$) Siguiendo el razonamiento anterior,
$\angle A = \angle BAC + \angle CAD = \angle ACD + \angle ACB = \angle C$, y de la misma forma se demuestra $\angle D = \angle B$.

$a \Rightarrow e$) Sea $O = \overline{AC} \cap \overline{BD}$ el punto de corte de las dos diagonales (En 1.9.12 vimos que las dos diagonales de un cuadrilátero regular se cortan en un punto). Los triángulos ΔAOB y ΔCOD serán congruentes por el criterio ASA, pues ya hemos visto que $\angle OAB \cong \angle OCD$, $\angle OBA \cong \angle ODC$ y por el apartado a) sabemos que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. Luego $\overline{DO} \cong \overline{OB}$ y $\overline{AO} \cong \overline{OC}$.

$c \Rightarrow a$) Trazamos la diagonal $\overline{AC}$. Los triángulos ΔADC y ΔCBA serán congruentes por el criterio SSS, pues por hipótesis $\overline{AD} \cong \overline{BC}$, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, y trivialmente $\overline{AC} \cong \overline{AC}$. Luego $\angle DAC \cong \angle ACB$ y por tanto $\overleftrightarrow{AD} // \overleftrightarrow{BC}$ por 4.3.20. De la misma forma $\angle DCA \cong \angle BAC \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$.

$d \Rightarrow a$) Trazamos la diagonal BD.
Por hipótesis: $\angle B = \angle D \Rightarrow \angle ABD + \angle DBC = \angle ADB + \angle BDC$
Sabemos que $180 = \angle A + \angle ABD + \angle ADB = \angle C + \angle BDC + \angle DBC$
$\angle A = \angle C$, luego $\angle ABD + \angle ADB = \angle BDC + \angle DBC$
Restando, $\angle DBC - \angle ADB = \angle ADB - \angle DBC$
Y por tanto $\angle DBC + \angle DBC = \angle ADB + \angle ADB \Rightarrow \angle DBC = \angle ADB$
Y aplicando 3.6.2 $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$

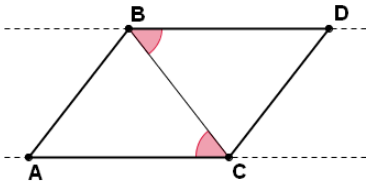
$e \Rightarrow c$) Sea E el punto de corte de las diagonales.



Basta aplicar el criterio SAS a los triángulos ΔAED y ΔBEC teniendo en cuenta $\overline{AE} \cong \overline{EC}$, $\overline{DE} \cong \overline{BE}$ y $\angle AED \cong \angle BEC$ por ser ángulos opuestos por el vértice para deducir que $\overline{AD} \cong \overline{BC}$. De forma similar, con los triángulos ΔAEB y ΔDEC llegamos a $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

6.1.3 Teorema.
Todo cuadrilátero con dos lados opuestos paralelos y congruentes es un paralelogramo.

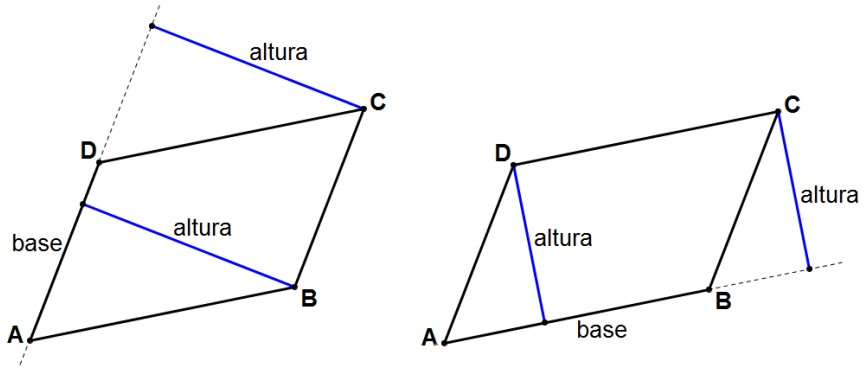
Demostración: Supongamos que $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ y $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. Trazamos el segmento $\overline{BC}$ y observamos que los triángulos ΔABC y ΔDCB son congruentes por el criterio SAS.



Luego $\overline{AC} \cong \overline{BD}$, y por tanto podemos aplicar el teorema 6.1.2b para deducir que es un paralelogramo.

6.1.4 Definición. Bases y alturas de un paralelogramo.

Dado un paralelogramo $\Diamond ABCD$, diremos **base** a cualquiera de sus lados, diremos **altura** a cualquiera de los dos segmentos que pasan por uno de los dos vértices del lado opuesto y son perpendiculares a dicha base.



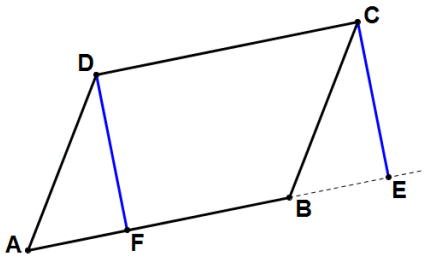
Por lo tanto todo paralelogramo tiene cuatro posibles bases y ocho posibles alturas.

6.1.5 Proposición.

Dado un paralelogramo $\Diamond ABCD$ y fijada una base $\overline{AB}$, sus dos alturas asociadas por C y por D son congruentes.

Demostración.

Sea E el punto de corte con $\overleftrightarrow{AB}$ de la altura por C y sea F el punto de corte con $\overleftrightarrow{AB}$ de la altura por D.



El cuadrilátero $\Diamond FECD$ es un paralelogramo pues sus cuatro ángulos son rectos y por tanto congruentes dos a dos (6.1.2d), luego tiene sus lados opuestos son congruentes (6.1.2c), en particular $\overline{DF} \cong \overline{CE}$.

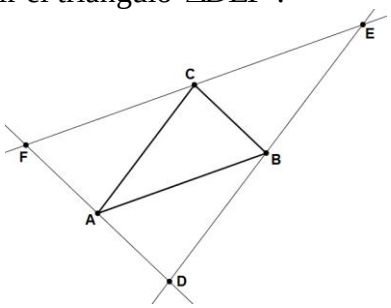
6.2 Rectas y puntos notables del triángulo (2).

6.2.1 Proposición.

Las tres alturas de un triángulo se cortan en un punto llamado **ortocentro**.

Demostración.

Sea un triángulo ΔABC. Trazamos las paralelas a cada lado y su vértice opuesto correspondiente para construir el triángulo ΔDEF.



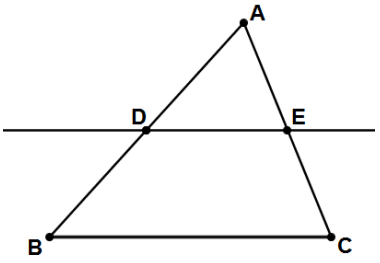
Los cuatro triángulos ΔFAC, ΔCAB, ΔCBE y ΔDAB serán congruentes. Por ejemplo, aplicando 6.1.2b, $\Delta FAC \cong \Delta BCA$ por ser $\Diamond FABC$ un paralelogramo.

Tenemos que, en particular, $\Delta FAC \cong \Delta ABD \Rightarrow \overline{FA} \cong \overline{AD}$ y por tanto A es el punto medio de $\overline{FD}$. De la misma forma se demuestra que C es el punto medio de $\overline{FE}$ y que B es el punto medio de $\overline{DE}$.

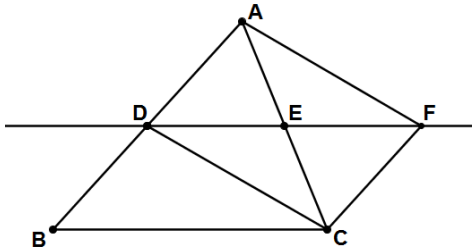
Luego las alturas del triángulo ΔABC son las mediatrices del triángulo ΔDEF, que ya sabemos que son concurrentes (3.10.2).

6.2.2 Lema. El conector de puntos medios de un triángulo.

Dado un triángulo ΔABC, si D es el punto medio de $\overline{AB}$ y E es el punto medio de $\overline{AC}$, entonces $\overleftrightarrow{DE} // \overleftrightarrow{BC}$, y $\left|\overline{DE}\right| = \frac{1}{2}\left|\overline{BC}\right|$



Demostración. En la semirrecta $op(\overrightarrow{ED})$ marcamos el punto F tal que $\overline{ED} = \overline{EF}$.



El cuadrilátero $\Diamond DCFA$ es un paralelogramo pues sus diagonales se cortan en el punto medio (6.1.2e). Por lo tanto $\overline{CF}$ es paralelo y congruente con $\overline{DA}$.

Por ser D el punto medio de $\overline{AB}$, $\overline{BD} \cong \overline{DA}$, luego $\overline{BD} \cong \overline{CF}$.

Ahora aplicando 6.1.3 tenemos que $\Diamond BCFD$ es un paralelogramo, y por tanto $\overline{BC}$ y $\overline{DF}$ son paralelos y congruentes.

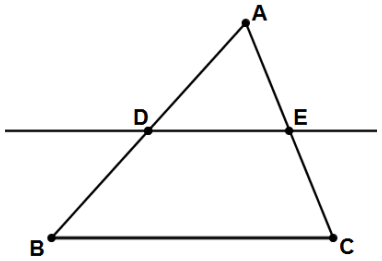
Por ser E el punto medio de $\overline{DF}$, $\left|\overline{DE}\right| = \frac{1}{2}\left|\overline{DF}\right| = \frac{1}{2}\left|\overline{BC}\right|$.

6.2.3 Proposición.

Existe un recíproco parcial para el lema anterior que puede ser útil.

Dado un triángulo ΔABC, y sea D el punto medio de $\overline{AB}$.

Si la recta r pasa por D y es paralela a $\overleftrightarrow{BC}$, entonces pasa por el punto medio de $\overline{AC}$, y se cumple $\left|\overline{DE}\right| = \frac{1}{2}\left|\overline{BC}\right|$.



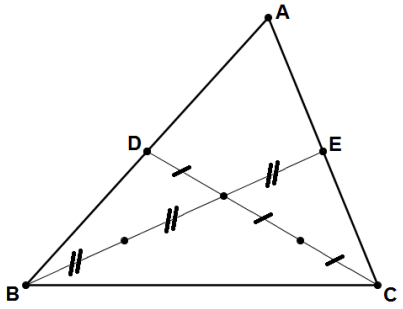
Demostración.

Por el Teorema de Pasch (2.2.5), y puesto que r no puede pasar por $\overline{BC}$, la recta r cortará en un punto E' a $\overline{AC}$.

Sea E el punto medio del segmento $\overline{AC}$. Por el lema anterior, $\overleftrightarrow{DE} // \overleftrightarrow{BC}$. Luego unicidad de la paralela a $\overleftrightarrow{BC}$ por D, se tendrá que $\overleftrightarrow{DE} = \overleftrightarrow{DE'}$, y por ser E' el único punto de corte con $\overline{AC}$, $E = E'$, y basta aplicar el lema 6.2.2.

6.2.4 Proposición.

Dos medianas de un triángulo se triseccionan en su punto de intersección.

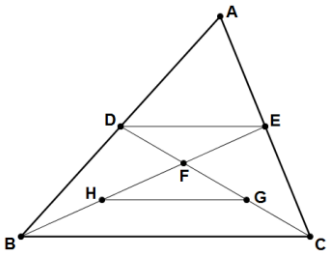


Demostración.

Dado un triángulo ΔABC, si D es el punto medio de $\overline{AB}$ y E es el punto medio de $\overline{AC}$, aplicamos el lema anterior para deducir que $\overline{DE} // \overline{BC}$ y $\left|\overline{DE}\right| = \frac{1}{2}\left|\overline{BC}\right|$.

Sea F el punto de intersección de las dos medianas $\overline{CD}$ y $\overline{BE}$ (falta demostrar su concurrencia ????)

Sea G el punto medio de $\overline{BF}$ y H el punto medio de $\overline{CF}$.



Aplicando nuevamente el lema anterior al triángulo ΔBCF, tenemos que $\overline{HG} // \overline{BC}$ y $\left|\overline{HG}\right| = \frac{1}{2}\left|\overline{BC}\right|$, así pues, $\overline{DE} // \overline{HG}$ $\left|\overline{HG}\right| = \left|\overline{DE}\right|$.

Luego el cuadrilátero $\Diamond HGED$ es un paralelogramo (6.1.3), y por lo tanto sus diagonales cortarán en su punto medio, es decir, $\overline{FE} \cong \overline{FH}$ y $\overline{FG} \cong \overline{FD}$.

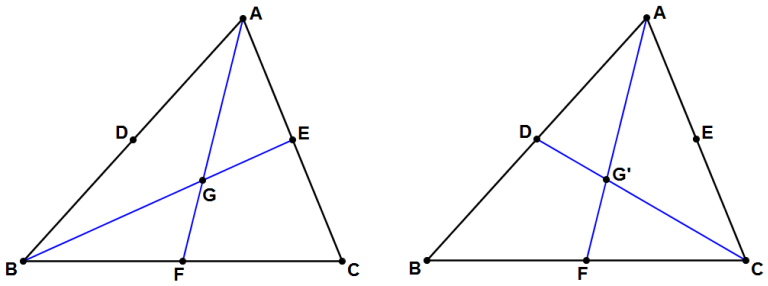
Por construcción de los puntos F y G, tenemos $\overline{FE} \cong \overline{FH} \cong \overline{HB}$ y $\overline{FD} \cong \overline{FG} \cong \overline{CG}$.

6.2.5 Corolario.

Las tres medianas se encuentran en un punto único llamado **baricentro.**

Demostración.

Sea un triángulo ΔABC, en el que trazamos las medianas $\overline{AF}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CD}$. Sea G el punto de corte de $\overline{AF}$ y $\overline{BE}$, y sea G' el punto de corte de $\overline{AF}$ y $\overline{CD}$.



Por la proposición anterior, $\left|\overline{FG}\right| = \frac{1}{3}\left|\overline{FA}\right|$, y también $\left|\overline{FG'}\right| = \frac{1}{3}\left|\overline{FA}\right|$, puesto que los puntos G y G' están en el interior del segmento $\overline{FA}$ (las medianas son segmentos pertenecientes al interior del triángulo), se debe cumplir $G = G'$.

Nota: El baricentro físicamente coincide con el centro de gravedad de la figura.

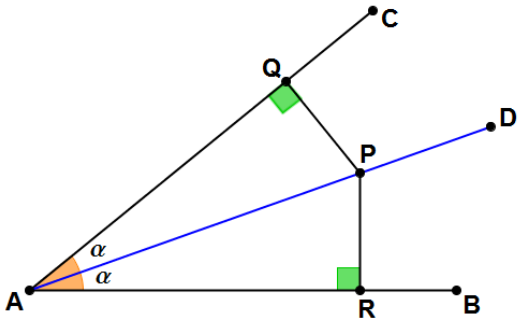
6.2.6 Proposición. Caracterización de los puntos de la bisectriz de un ángulo.

Recordemos la definición de distancia de un punto a una recta definida en 5.5.5.

Los puntos de la bisectriz de un ángulo son aquellos que equidistan de sus dos lados.

Demostración.

Sea un ángulo $\angle BAC$ y $\overrightarrow{AD}$ su bisectriz.



Queremos ver que $P \in \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow dist(P, \overrightarrow{AC}) = dist(P, \overrightarrow{AB})$. Sean R y Q los pies de las perpendiculares por P a $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ respectivamente.

Si $P \in \overrightarrow{AD}$ entonces, puesto que

$\angle APR = 180 - \angle PAR - 90 = 180 - \angle PAQ - 90 = \angle APQ$,

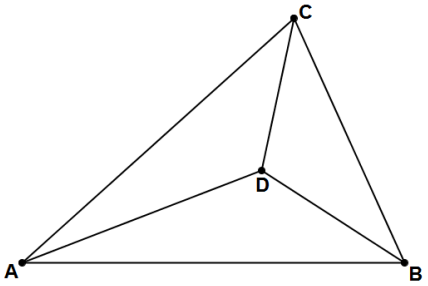
Por el criterio ASA $\Delta APR \cong \Delta APQ$, y por lo tanto $\overline{QP} \cong \overline{PR}$ y

$dist(P, \overrightarrow{AC}) = dist(P, \overrightarrow{AB})$.

Recíprocamente, si $dist(P, \overrightarrow{AC}) = dist(P, \overrightarrow{AB})$, es decir $\overline{QP} \cong \overline{PR}$, tenemos dos triángulos ΔAPR y ΔAPQ rectángulos con igual cateto e hipotenusa, y por tanto son congruentes (criterio HL de 3.8.7). En particular, se verifica que $\angle PAQ \cong \angle PAR$, es decir, el punto P pertenece a la bisectriz del ángulo.

6.2.7 Proposición.

Las bisectrices de un triángulo se encuentran en un único punto llamado **incentro**.



Demostración.

Sea D el punto de corte de las bisectrices de los ángulos $\angle A$ y $\angle B$.

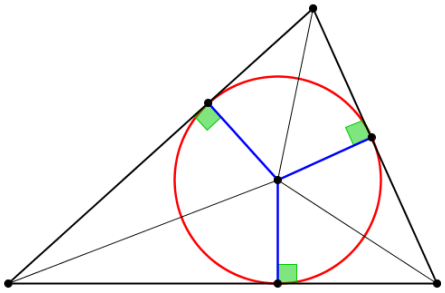
Basta ver que D pertenece a la bisectriz por $\angle C$, para lo que utilizaremos tres veces la proposición anterior.

D pertenece a la bisectriz del ángulo $\angle A$, luego $dist(D, \overline{AC}) = dist(D, \overline{AB})$.

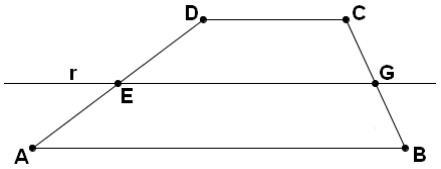
D pertenece a la bisectriz del ángulo $\angle B$, luego $dist(D, \overline{AB}) = dist(D, \overline{BC})$.

Así pues $dist(D, \overline{AC}) = dist(D, \overline{BC})$ y por tanto D pertenece a la bisectriz por $\angle C$.

6.2.8 Proposición. Circunferencia inscrita.
La proposición anterior nos indica que si trazamos las rectas perpendiculares a cada lado por el incentro, los tres segmentos son congruentes, y por tanto son radios de una misma circunferencia, tangente a los tres lados del triángulo, llamada **circunferencia inscrita**:



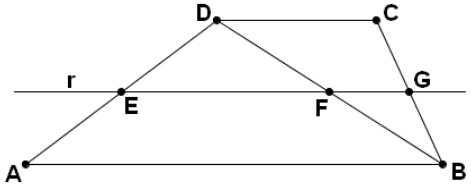
6.2.9 Proposición. El conector de puntos medios de un trapezoide.
Si una recta pasa por el punto medio de un lado de un trapezoide y es paralela a la base, entonces también pasa por el punto medio del otro lado, y su longitud es un medio de la semisuma de la suma de las dos bases.
Recíprocamente, la recta que pasa por los dos puntos medios de los lados es paralela a la base.



Demostración.
Sea un trapezoide $\Diamond ABCD$ tal que $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$.
Sea E el punto medio de $\overline{AD}$ y sea r la recta que pasa por E y es paralela a $\overleftrightarrow{AB}$.
Trazamos la diagonal $\overline{BD}$ del trapezoide.
Por la proposición 6.2.3, la recta r cortará el segmento $\overline{BD}$ en su punto medio F y

$$\left|\overline{EF}\right| = \frac{1}{2}\left|\overline{AB}\right|$$

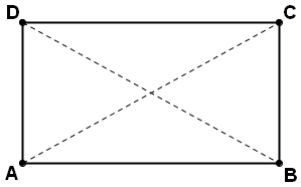
Volvemos a aplicar la misma proposición para el triángulo ΔBCD, con lo que demostramos que r corta a $\overline{BC}$ en su punto medio G, y $\left|\overline{FG}\right| = \frac{1}{2}\left|\overline{CD}\right|$.



Finalmente, $\left|\overline{EG}\right| = \left|\overline{EF}\right| + \left|\overline{FG}\right| = \frac{1}{2}\left|\overline{AB}\right| + \frac{1}{2}\left|\overline{CD}\right| = \frac{\left|\overline{AB}\right| + \left|\overline{CD}\right|}{2}$.
Veamos ahora el recíproco: Sean E y G los puntos medios de los lados y supongamos que $r = \overleftrightarrow{EG}$ no es paralela a $\overleftrightarrow{AB}$. Sea s la recta paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ por E. Por el razonamiento anterior, esta recta s pasará por G, y por lo tanto $s = r$, lo que nos lleva a contradicción. Así que forzosamente $r // \overleftrightarrow{AB}$.

6.3 Rectángulos.

6.3.1 Definición. Rectángulo. (Elementos 1 Definición 22)
Un rectángulo es un cuadrilátero cuyos cuatro ángulos son iguales (luego los cuatro son rectos).



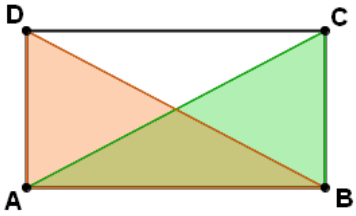
6.3.2 Definición. Base y altura de un rectángulo.
Dado un rectángulo $\Diamond ABCD = \{\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}\}$, el segmento $\overline{AB}$ será la **base** y el segmento $\overline{BC}$ será la **altura** del rectángulo.

6.3.3 Proposición.
Todo rectángulo es un paralelogramo.

Demostración: Basta aplicar 6.1.2c pues los ángulos opuestos son rectos, y por tanto congruentes.

6.3.4 Proposición.
Todo rectángulo tiene las diagonales congruentes.

Demostración: Consideramos los triángulos ΔADB y ΔBCA.



$\angle A = \angle B$ pues ambos son rectos, $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ pues todo rectángulo es un paralelogramo y aplicamos 5.1.3(a), y trivialmente $\overline{AB} \cong \overline{AB}$, luego $\Delta ADB \cong \Delta BCA$ por el criterio SAS. Por lo tanto $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.

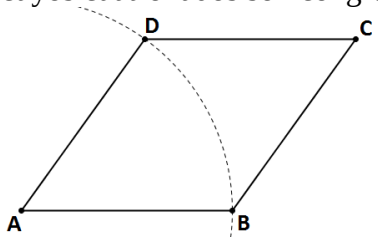
6.3.5 Proposición.
Todo paralelogramo con las diagonales congruentes es un rectángulo.
Observación: No todo cuadrilátero con las diagonales congruentes es un rectángulo.

Demostración: Los triángulos ΔABC y ΔADB serán congruentes por el criterio SSS, pues por hipótesis $\overline{AD} \cong \overline{BC}$, y por 5.1.2(b) también $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ y $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.
Por lo tanto $\angle BAC \cong \angle ABD$, pero estos ángulos son suplementarios (4.3.20), luego ambos son rectos. De la misma forma se demuestra que $\angle C$ y $\angle D$ también serán rectos.

6.3.6 Corolario.
Un paralelogramo es un rectángulo si y sólo si sus diagonales son congruentes.
Demostración. Es 5.1.8 y 5.1.9.

6.4 Rombos.

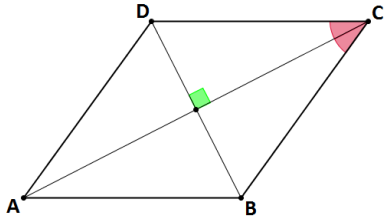
6.4.1 Definición. Rombo. ("Rhombus") (Elementos 1 Definición 22)
Un rombo es un cuadrilátero cuyos cuatro lados son congruentes.



6.4.2 Proposición.
Todo rombo es un paralelogramo.

Demostración. Basta aplicar 6.1.3(a)

6.4.3 Proposición.
En todo rombo se cumplen las siguientes propiedades:
a) Las diagonales se cortan perpendicularmente.
b) Las diagonales son las bisectrices de los ángulos internos.

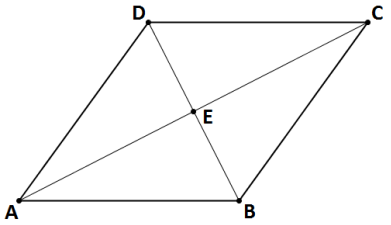


Demostración. Sea un rombo $\Diamond ABCD$ y sea E el punto de corte de las dos diagonales. Por ser un rombo $\overline{CD} \cong \overline{BC}$, por 5.1.2(d) $\overline{DE} \cong \overline{BE}$ y claramente $\overline{CE} \cong \overline{CE}$, luego por el criterio SSS se deduce que $\Delta DEC \approx \Delta BEC$, y por tanto $\angle DCE \cong \angle BCE$ y $\angle EDC \cong \angle EBC$. Luego el segmento $\overline{CE}$ es la bisectriz por C del triángulo ΔDCB, y por 2.9.13 coincide con la altura, luego $\angle BEC$ y $\angle DEC$ son rectos.

6.4.4 Proposición.
Todo paralelogramo que cumpla al menos una de las siguientes condiciones es un rombo:
a) Dos lados consecutivos son congruentes.
b) Las diagonales son perpendiculares.
c) Una de las diagonales es la bisectriz del ángulo interno de su vértice.

Observación: Esta caracterización sólo es válida para paralelogramos, y no se cumple para cualquier cuadrilátero.

Demostración. Sea el paralelogramo $\Diamond ABCD$ y sea E el punto de corte de sus diagonales.



a) Supongamos que $\overline{BC} \cong \overline{CD}$. Luego $\overline{AB} \cong \overline{CD} \cong \overline{BC} \cong \overline{AD}$ por 5.1.2(b). Y por lo tanto es un rombo.

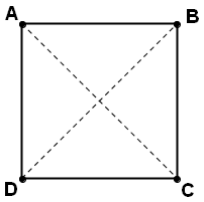
b) Si las diagonales son perpendiculares $\angle BEC \cong \angle DEC$, $\overline{DE} \cong \overline{BE}$ por ser un paralelogramo y 5.1.2(d), luego aplicando SAS tenemos que $\Delta DEC \cong \Delta BEC$, luego $\overline{BC} \cong \overline{CD}$, y podemos aplicar el apartado a) de esta misma demostración.

c) Supongamos que $\angle DCE \cong \angle BCE$. Luego el segmento $\overline{CE}$ es bisectriz del triángulo ΔDBC y también es mediana por 5.1.2(d). Luego por 2.9.14 el triángulo ΔDBC será isósceles en C y en consecuencia $\overline{BC} \cong \overline{CD}$, por lo que nuevamente podemos aplicar el apartado a) de esta misma demostración.

6.5 Cuadrados.

6.5.1 Definición. Cuadrado. (Elementos 1 Definición 22)

Un cuadrado es un cuadrilátero con los cuatro lados y los cuatro ángulos iguales, es decir, es un rombo y un rectángulo al mismo tiempo.



6.5.2 Proposición.

Las diagonales de un cuadrado son congruentes, perpendiculares y bisectrices de los ángulos internos del cuadrado.

Demostración: Basta aplicar 5.1.8, 5.1.13(a) y 5.1.13(b).

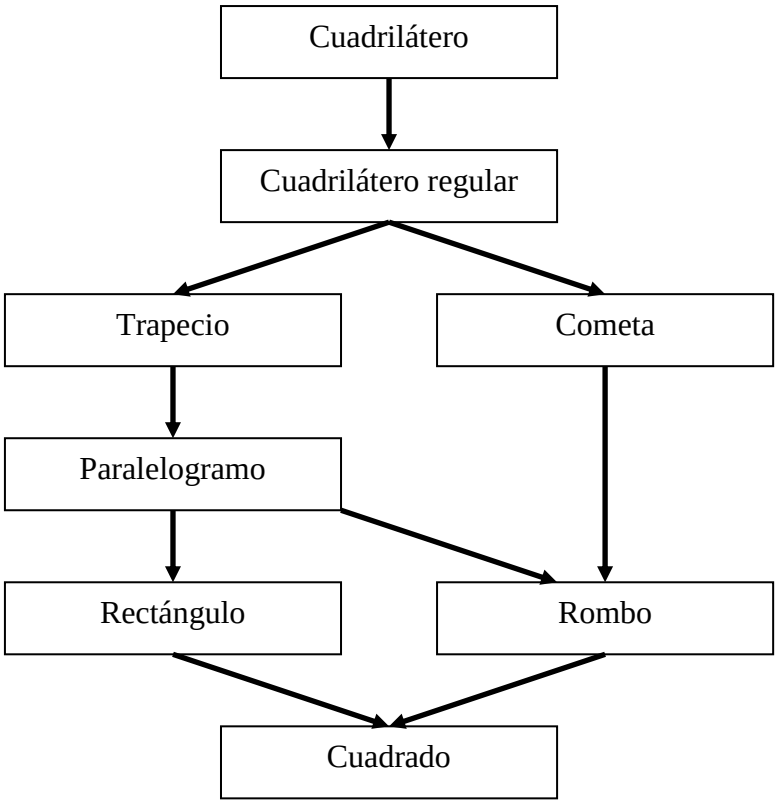
6.5.3 Proposición.

Todo paralelogramo que cumpla al menos una de las siguientes condiciones es un cuadrado:
a) Las diagonales son congruentes y perpendiculares.
b) Las diagonales son congruentes y una de ellas es bisectriz del ángulo interno del vértice del paralelogramo.

Observación: Esta caracterización sólo es válida para paralelogramos, y no se cumple para cualquier cuadrilátero.

Demostración. a) Por 5.1.14(b) si las diagonales del paralelogramo son perpendiculares será un rombo, y por 5.1.9 si las diagonales son congruentes será un rectángulo.
b) Por 5.1.14(c) será un rombo, y por 5.1.9 será un rectángulo.

6.5.4 Esquema. Los cuadriláteros fundamentales.



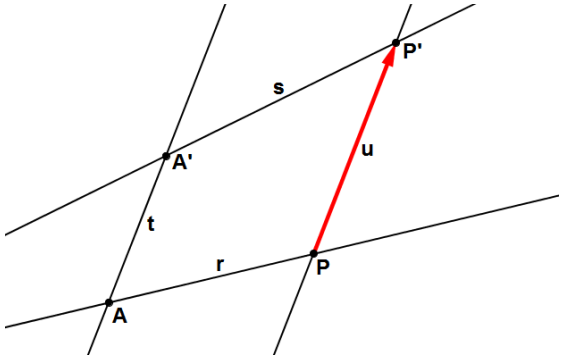
6.6 Proyección paralela.

6.6.1 Definición. Proyección paralela.

Sean dos rectas r y s, y sea t una recta transversal común. Sean $A = r \cap t$ y $A' = s \cap t$. Para cualquier punto $P \in r$, existirá una única recta u paralela a t por P, y sea $P' = s \cap u$. Tenemos así definida una función

$$f : r \to s$$
$$P \mapsto f(P) = P' = u \cap s$$

a la que denominaremos **proyección paralela de r en s a lo largo de t**.



6.6.2 Teorema.

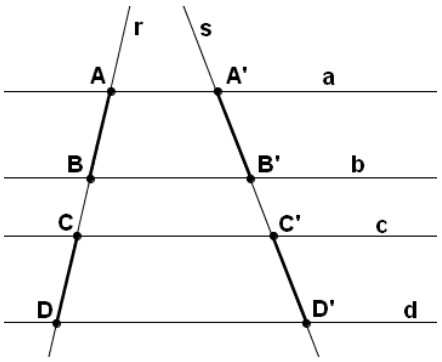
La proyección paralela es una biyección.

Demostración. Supongamos que $f(P) = f(Q)$. Las rectas $\overleftrightarrow{Pf(P)}$ y $\overleftrightarrow{Qf(Q)}$ son ambas paralelas a t, y ambas pasan por el mismo punto, luego por PUP han de ser la misma. Puesto que P y Q son puntos de corte de esta recta con r, se deduce que $P = Q$. Luego es inyectiva.

Supongamos que $P' \in s$. Trazamos la recta u, paralela a t por P'. Sea P su punto de corte con r. Por unicidad de la recta paralela por un punto, u será también la única recta paralela a t por P, y por tanto, por unicidad de su punto de corte con s, $f(P) = P'$. Luego es suprayectiva.

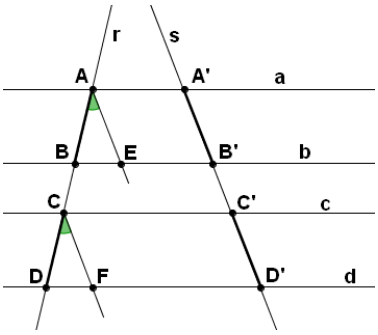
6.6.3 Teorema. La proyección paralela mantiene la congruencia de segmentos.

Sean dos rectas r y s que cortan a cuatro rectas a, b, c y d las cuatro paralelas entre sí, en los puntos A, A', B, B', C, C', D y D' tal y como se indica en el siguiente diagrama:



Entonces $\overline{AB} \cong \overline{CD} \Rightarrow \overline{A'B'} \cong \overline{C'D'}$
Este teorema también se suele llamar "**Pequeño Teorema de Tales".**

Demostración: Supongamos que r y s no son paralelas. Por el punto A trazamos una recta paralela a s. Sea E su punto de corte con b. De la misma forma trazamos por C una recta paralela a s. Sea F su punto de corte con d.



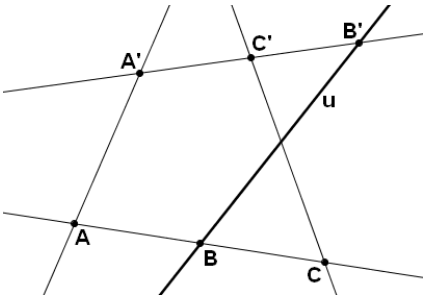
$AE // CF$ por transitividad del paralelismo. Luego $\angle DCF \cong \angle BAE$. También se cumple $b // d$ luego $\angle ABE \cong \angle CDF$ y por hipótesis $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, luego podemos aplicar el criterio de congruencia de triángulos ASA para deducir que $\Delta ABE \cong \Delta CDF$, y por tanto $\overline{AE} \cong \overline{CF}$.
Los cuadriláteros $\Diamond AA'B'E$ y $\Diamond C'D'FC$ son paralelogramos, luego sus lados son congruentes (6.1.2c), es decir, $\overline{AE} \cong \overline{A'B'}$ y $\overline{CF} \cong \overline{C'D'}$. Luego por transitividad de la congruencia de segmentos $\overline{A'B'} \cong \overline{AE} \cong \overline{CF} \cong \overline{C'D'} \Rightarrow \overline{A'B'} \cong \overline{C'D'}$.

Nota: El caso en que r y s sean paralelas debe demostrarse de forma independiente, aunque la demostración anterior ya indica el razonamiento a seguir.

6.6.4 Teorema. La proyección paralela mantiene el orden.
Sean dos rectas r y s, y sea t una recta transversal común. Sea f la proyección paralela de r en s a lo largo de t.

Entonces $A*B*C \Rightarrow A'*B'*C'$

Demostración.
Supongamos lo contrario, por ejemplo que $A'*C'*B'$. Sea $u = \overleftrightarrow{BB'}$.



$$\left.\begin{array}{l} AA' // BB' \Rightarrow A' \approx_u A \\ A'*C'*B' \Rightarrow A' \approx_u C' \end{array}\right\} \Rightarrow A \approx_u C'$$
$$A*B*C \Rightarrow A \not\approx_u C$$

Luego por 2.2.6, llegamos a $C \not\approx_u C'$. Pero sin embargo $CC' // BB' \Rightarrow C' \approx_u C$, llegando a contradicción. Al mismo resultado llegaríamos suponiendo $C'*A'*B'$.

6.6.5 Lema.

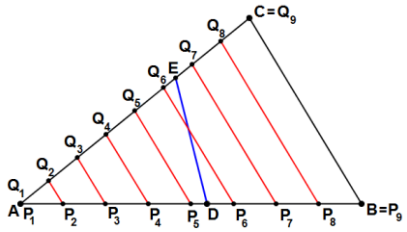
Dado un triángulo ΔABC y puntos D en $\overline{AB}$ y E en $\overline{AC}$ tales que $\overleftrightarrow{DE}$ no sea paralela a $\overleftrightarrow{BC}$. Entonces podemos dividir $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ en n segmentos:

$$\{A = P_1, P_2, P_3, ..., P_n = B\}\ ,\ \left|\overline{P_i P_{i+1}}\right| = a \text{ constante,}$$

$$\{A = Q_1, Q_2, Q_3, ..., Q_n = C\}\ ,\ \left|\overline{Q_i Q_{i+i}}\right| = b \text{ constante,}$$

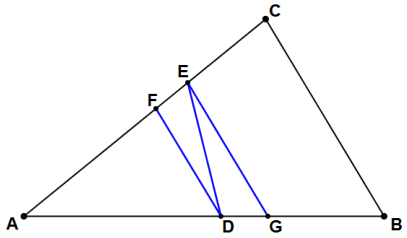
con segmentos $\overline{P_i Q_i}$ paralelos a $\overline{BC}$ y

$$P_k * D * P_{k+1} \text{ y } Q_{k+1} * E * Q_{k+2} \text{ para cierto k.}$$



Demostración.

Trazamos $\overline{DF}$ y $\overline{EG}$ paralelas a $\overleftrightarrow{BC}$ por D y E respectivamente.
Supongamos que $A * D * G$ (el caso $A * G * D$ se demuestra de forma similar).
Entonces, puesto que la proyección paralela conserva el orden, tendremos $A * F * E$.



Por el Postulado de Arquímedes (4.4.2), existirá un n tal que

$$n \cdot \overline{DG} > \overline{AB}$$

Luego existirá un m tal que $2^m \cdot \overline{DG} > \overline{AB}$, y por tanto $\overline{DG} > \frac{1}{2^m}\overline{AB}$.

Dividimos el segmento $\overline{AB}$ en 2^m intervalos mediante la determinación de puntos medios P_i. Cada uno de estos puntos medios se corresponde por proyección paralela a puntos medios Q_i de $\overline{AC}$ (6.2.3).

6.6.6 Lema.

Dado un triángulo ΔABC y puntos D en $\overline{AB}$ y E en $\overline{AC}$ tales que $\overleftrightarrow{DE}$ no sea paralela a $\overleftrightarrow{BC}$. Entonces

$$\frac{AD}{AB} \neq \frac{AE}{AC}$$

Demostración.

Aplicando el lema anterior, dividimos el segmento $\overline{AB}$ en n segmentos iguales $A = P_1, P_2, P_3, ..., P_n = B$ de forma que $D * P_k * G$ y $A * Q_k * E$ para cierto k.

Trazamos las paralelas $\overline{P_iQ_i}$ a $\overleftrightarrow{BC}$. Sea $a=\left|\overline{P_iP_{i+1}}\right|$ y $b=\left|\overline{Q_iQ_{i+1}}\right|$.

$$\left.\begin{array}{l}|AP_k|=k|AP_1|=k\cdot a\\ |AB|=n|AQ_1|=n\cdot a\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{|AP_k|}{|AB|}=\frac{k\cdot a}{n\cdot b}=\frac{k}{n}$$

$$\left.\begin{array}{l}|AQ_k|=k|AQ_1|=k\cdot b\\ |AC|=n|AQ_1|=n\cdot b\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{|AQ_k|}{|AC|}=\frac{k\cdot b}{n\cdot b}=\frac{k}{n}$$

Es decir,

$$\frac{|AP_k|}{|AB|}=\frac{|AQ_k|}{|AC|}$$

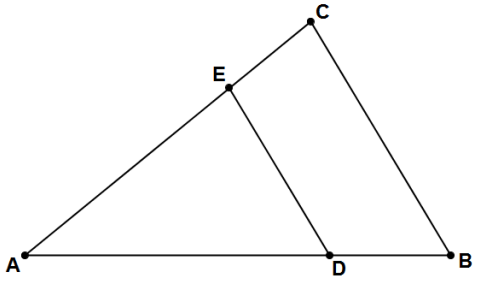
Pero $A*D*P_k\Rightarrow\left|\overline{AD}\right|<\left|\overline{AP_k}\right|$ y $A*Q_k*E\Rightarrow\left|\overline{AQ_k}\right|<\left|\overline{AE}\right|$

$\frac{|AD|}{|AB|}<\frac{|AP_k|}{|AB|}=\frac{|AQ_k|}{|AC|}<\frac{|AE|}{|AC|}$ luego $\frac{|AD|}{|AB|}<\frac{|AE|}{|AC|}$ y por tanto $\frac{|AD|}{|AB|}\neq\frac{|AE|}{|AC|}$

6.6.7 Corolario. The Side-Splitting Theorem.

Dado un triángulo ΔABC y puntos D en $\overline{AB}$ y E en $\overline{AC}$ tales que $\overleftrightarrow{DE}\,//\,\overleftrightarrow{BC}$. Entonces

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}\text{ y }\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$



Demostración.

Trazamos en $\overline{AC}$ el punto E' tal que $\left|\overline{AE'}\right|=\frac{\left|\overline{AD}\right|}{\left|\overline{AB}\right|}\left|\overline{AC}\right|$, es decir, $\frac{\left|\overline{AE'}\right|}{\left|\overline{AC}\right|}=\frac{\left|\overline{AD}\right|}{\left|\overline{AB}\right|}$.

La recta $\overleftrightarrow{DE'}$ tiene que ser paralela a $\overleftrightarrow{BC}$, puesto que en caso contrario, aplicando el lema anterior, tendríamos que $\left|\overline{AE'}\right|/\left|\overline{AC}\right|\neq\left|\overline{AD}\right|/\left|\overline{AB}\right|$, llegando a contradicción.

Pero ahora tenemos dos rectas paralelas a $\overleftrightarrow{BC}$ por un mismo punto D, luego tienen que ser la misma y por tanto $E=E'$.

La demostración de la segunda igualdad es puramente algébrica:

$A*D*B\Rightarrow\left|\overline{AB}\right|=\left|\overline{AD}\right|+\left|\overline{DB}\right|$

$A*E*C\Rightarrow\left|\overline{AC}\right|=\left|\overline{AE}\right|+\left|\overline{EC}\right|$

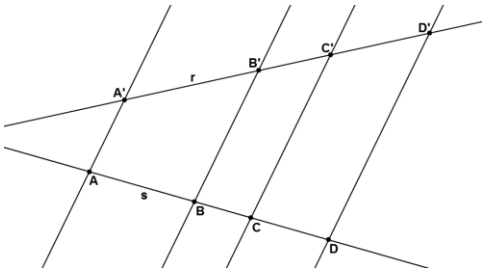
$$\frac{|\overline{AE}|}{|\overline{AC}|}=\frac{|\overline{AD}|}{|\overline{AB}|}\Rightarrow\frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AE}|}=\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AD}|}\Rightarrow\frac{|\overline{AE}|+|\overline{EC}|}{|\overline{AE}|}=\frac{|\overline{AD}|+|\overline{DB}|}{|\overline{AD}|}$$

$$\Rightarrow\frac{|\overline{AE}|}{|\overline{AE}|}+\frac{|\overline{EC}|}{|\overline{AE}|}=\frac{|\overline{AD}|}{|\overline{AD}|}+\frac{|\overline{DB}|}{|\overline{AD}|}\Rightarrow 1+\frac{|\overline{EC}|}{|\overline{AE}|}=1+\frac{|\overline{DB}|}{|\overline{AD}|}$$

$$\Rightarrow\frac{|\overline{EC}|}{|\overline{AE}|}=\frac{|\overline{DB}|}{|\overline{AD}|}\Rightarrow\frac{|\overline{AE}|}{|\overline{EC}|}=\frac{|\overline{AD}|}{|\overline{DB}|}$$

6.6.8 Teorema. La proyección paralela mantiene las razones de los segmentos.
Sean dos rectas r y s, y sea t una recta transversal común. Sea f la proyección paralela de r en s a lo largo de t.
Sean A, B, C y D en r tales que $C \neq D$.
Entonces

$$\frac{AB}{CD}=\frac{A'B'}{C'D'}$$



Demostración.

Si r y s no son paralelas, es una aplicación directa de 6.6.7. Si son paralelas basta tener en cuenta que los razonamientos utilizados con puntos medios para triángulos sirven también para trapecios.

7 Semejanza.

7.1 Definición axiomática de área.

El desarrollo de la semejanza de triángulos y en general de toda la geometría euclídea se facilita enormemente si podemos asociar a las figuras geométricas un valor numérico llamado "área" con sus propiedades habituales.

7.1.1 Definición. Descomposición de polígonos. ("polygonal decomposition")

Una descomposición de un polígono P es una colección finita de polígonos $\{P_1, P_2,..., P_n\}$, cuya unión es P y que sólo se cortan por los lados. Escribiremos

$$P = P_1 + P_2 + ... + P_n .$$

7.1.2 Definición axiomática de área.

Asociamos a cada polígono P un número $\alpha(P)$, llamado **área de P**, que cumplirá los siguientes axiomas:

Axioma A1. El área es no negativa: (*No negatividad*)

$\alpha(P) \geq 0$

Axioma A2. Las figuras congruentes tienen el mismo área: (*Invariancia*)

Si $\Delta ABC \cong \Delta CDE$ entonces $\alpha(\Delta ABC) = \alpha(\Delta CDE)$

En general, si P y Q son dos polígonos congruentes, $\alpha(P) = \alpha(Q)$

Axioma A3. El área no depende de la descomposición del polígono: (*Aditividad*)

Si $P = P_1 + P_2 + ... + P_n$ entonces $\alpha(P) = \alpha(P_1) + \alpha(P_2) + ... + \alpha(P_n)$

Axioma A4. El área de un rectángulo es base por altura: (*Normalización*)

Si $R = \Diamond ABCD$ es un rectángulo, $\alpha(R) = \left|\overline{AB}\right| \cdot \left|\overline{BC}\right|$

7.1.3 Teorema. Axioma A4 alternativo.

El axioma A4 se puede sustituir por el siguiente axioma equivalente:

Axioma A4b. El área de un cuadrado es lado^2: (*Normalización*)

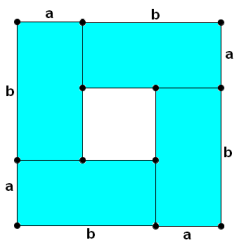
Si $R = \Diamond ABCD$ es un cuadrado, $\alpha(R) = \left|\overline{AB}\right|^2$

Demostración.

Claramente Axioma A4 $\Rightarrow$ Axioma A4', por ser un caso particular.

Veamos ahora Axioma A4' $\Rightarrow$ Axioma A4:

Si $R = \Diamond ABCD$ es un rectángulo de base a y altura b, supongamos $b > a$. Con cuatro rectángulos iguales podemos construir un cuadrado de lado $a + b$, si añadimos en el centro un cuadrado de lado $b - a$.



El área del cuadrado grande será, por Axioma A4b, $(a+b)^2$,

El área del cuadrado pequeño central será, igualmente por Axioma A4b, $(b-a)^2$,

$(a+b)^2 = 4\alpha(\Diamond ABCD)+(b-a)^2 \Rightarrow$

$a^2+b^2+2ab = 4\alpha(\Diamond ABCD)+a^2+b^2-2ab \Rightarrow$

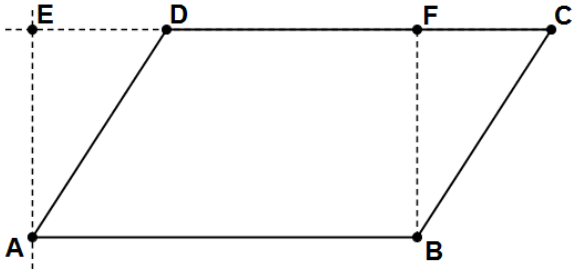
$2ab = 4\alpha(\Diamond ABCD)-2ab \Rightarrow 4ab = 4\alpha(\Diamond ABCD) \Rightarrow ab = \alpha(\Diamond ABCD)$

7.1.4 Teorema. Área de un paralelogramo.

Sea $\Diamond ABCD$ un paralelogramo. Entonces $\alpha(\Diamond ABCD) = base \cdot altura$.

Demostración. Sea $\Diamond ABCD$ un paralelogramo. Si $\Diamond ABCD$ es un rectángulo, basta aplicar 7.1.2c. Supongamos que no lo sea. Entonces dos ángulos opuestos del paralelogramo serán agudos y los otros dos ángulos opuestos serán obtusos. Supongamos que $\angle DAB$ es agudo.

Trazamos $\overline{AE}$ perpendicular a $\overline{CD}$ por A y $\overline{BF}$ perpendicular a $\overline{CD}$ por B.



$\angle EDA \cong \angle FCB$ (4.3.6) y $\angle DEA \cong \angle CFB$ pues ambos son rectos (2.5.3), luego $\angle EAD \cong \angle FBC$ y por lo tanto ($\left|\overline{AD}\right| \cong \left|\overline{BC}\right|$ por ser un paralelogramo) tenemos $\Delta EDA \cong \Delta FCB$ (Criterio ASA) y por tanto $\alpha(\Delta EDA) \cong \alpha(\Delta FCB)$ (Axioma A2).

Ahora

$\alpha(\Diamond ABCD) = \alpha(\Diamond ABFD)+\alpha(\Delta BCF) = \alpha(\Diamond ABFD)+\alpha(\Delta ADE) =$

$= \alpha(\Diamond ABFE) = b \cdot h$

7.1.5 Teorema. Área de un triángulo.

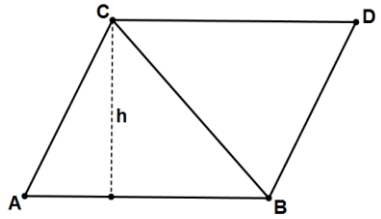
El área de un triángulo de base b y altura h es $\dfrac{b \cdot h}{2}$.

Demostración.

Sea un triángulo ΔABC. Fijamos como base el lado $\overline{AB}$ y sea h su altura correspondiente. Trazamos la paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ por C y la paralela a $\overleftrightarrow{AC}$ por B. Sea D su punto de intersección. El cuadrilátero $\Diamond ABCD$ será un paralelogramo, y claramente $\alpha(\Diamond ABCD) = \overline{AB} \cdot h$ (7.1.4).

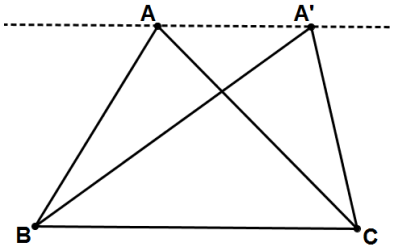
Puesto que $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (6.1.2b), $\alpha(\Delta ABC) = \alpha(\Delta CDA)$ (Axioma A2).

Luego $\overline{AB} \cdot h = \alpha(\Diamond ABCD) = \alpha(\Delta ABC)+\alpha(\Delta CDA) = 2\alpha(\Delta ABC) \Rightarrow \alpha(\Delta ABC) = \dfrac{\overline{AB} \cdot h}{2}$

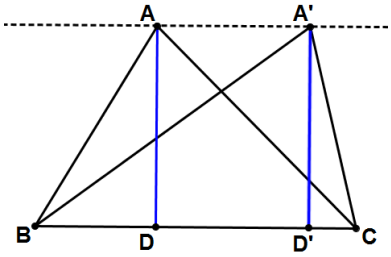


7.1.6 Lema. "Sliding Lemma".

Sean ΔABC y $\Delta A'BC$ dos triángulos con un lado común $\overline{BC}$ y $\overleftrightarrow{AA'} // \overleftrightarrow{BC}$.
Entonces $\alpha(\Delta ABC) = \alpha(\Delta A'BC)$.



Demostración. Sean D y D' los pies sobre $\overleftrightarrow{BC}$ de las alturas desde A y A' respectivamente.

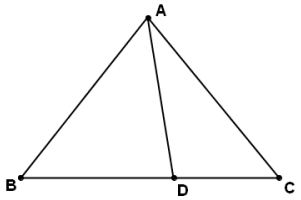


$\overleftrightarrow{AD} // \overleftrightarrow{A'D'}$ pues ambas rectas son perpendiculares a la misma recta $\overleftrightarrow{BC}$.
Por lo tanto $\Diamond AA'D'D$ es un paralelogramo, y por tanto $\overline{AD} \cong \overline{A'D'}$ y en consecuencia $\left|\overline{AD}\right| = \left|\overline{A'D'}\right|$. Finalmente, $\alpha(\Delta ABC) = \frac{1}{2}\left|\overline{BC}\right| \cdot \left|\overline{AD}\right| = \frac{1}{2}\left|\overline{BC}\right| \cdot \left|\overline{AD'}\right| = \alpha(\Delta A'BC)$.

7.1.7 Corolario.

Sea ΔABC un triángulo y D un punto tal que B*D*C. Entonces

$$\frac{\alpha(\Delta ADC)}{\alpha(\Delta ABC)} = \frac{DC}{BC}$$

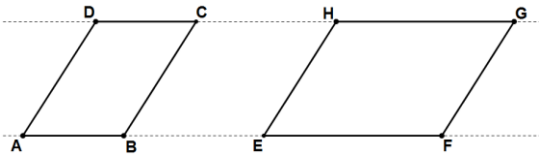


Demostración. Los triángulos ΔADC y ΔABC comparten una misma altura h, luego

$$\frac{\alpha(\Delta ADC)}{\alpha(\Delta ABC)} = \frac{\frac{1}{2} DC \cdot h}{\frac{1}{2} BC \cdot h} = \frac{DC}{BC}$$

7.1.7 Corolario.
Sea $\Diamond ABCD$ y $\Diamond EFGH$ son dos paralelogramos tales que A, B, E y F son colineales y C, D, H y G son colineales, entonces

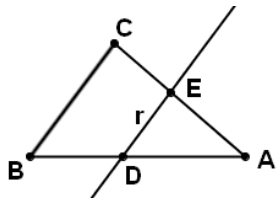
$$\frac{\alpha(\Delta ABCD)}{\alpha(\Delta EFGH)} = \frac{AB}{EF}$$



Demostración.
Es el mismo razonamiento que en el corolario anterior. Ambos paralelogramos comparten una misma altura h, y por tanto

$$\frac{\alpha(\Delta ABCD)}{\alpha(\Delta EFGH)} = \frac{AB \cdot h}{EF \cdot h} = \frac{AB}{EF}$$

7.1.8 Teorema. "The Side-Splitter Theorem".
Sea ΔABC un triángulo, y r una recta paralela a $\overleftrightarrow{BC}$ que corta $\overleftrightarrow{AB}$ en un punto D interior a $\overline{AB}$. Entonces r también cortará $\overline{AC}$ en un punto interior E y $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$.



Nota: Este Teorema es clave el desarrollo de la semejanza de triángulos. Esta demostración supone la existencia de una función área, pero en 6.6.7 se ha desarrollado una versión sin utilizarla, mediante el Postulado de Arquímedes.

Demostración. Por el teorema de Pasch (2.2.5), si r corta a $\overline{AB}$ en un punto interior, entonces también cortará $\overline{AC}$ o $\overline{BC}$ en un punto interior, pero r es paralela a $\overleftrightarrow{BC}$, por lo tanto r cortará $\overline{AC}$ en un punto interior.

Aplicamos el lema anterior al triángulo ΔAEB: $\frac{\alpha(\Delta ADE)}{\alpha(\Delta AEB)} = \frac{AD}{AB}$

Y aplicamos el mismo lema al triángulo ΔADC: $\frac{\alpha(\Delta ADE)}{\alpha(\Delta ADC)} = \frac{AE}{AC}$

Por otro lado, $\alpha(\Delta AEB) = \alpha(\Delta ADE) + \alpha(\Delta DEB)$ y $\alpha(\Delta ADC) = \alpha(\Delta ADE) + \alpha(\Delta DEC)$, y sabemos que $\alpha(\Delta DEB) = \alpha(\Delta DEC)$ por el lema 5.3.4, luego $\alpha(\Delta AEB) = \alpha(\Delta ADC)$, y en consecuencia:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{\alpha(\Delta ADE)}{\alpha(\Delta AEB)} = \frac{\alpha(\Delta ADE)}{\alpha(\Delta ADC)} = \frac{AE}{AC}$$

7.2 Triángulos semejantes.

7.2.1 Definición. Triángulos semejantes. (Triangle Similarity)
Diremos que los triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ son semejantes cuando podamos definir una biyección entre sus vértices

$$A \leftrightarrow A' \quad B \leftrightarrow B' \quad C \leftrightarrow C'$$

de forma que $\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$, y $\angle C \cong \angle C'$. Por lo tanto la congruencia de triángulos es un caso particular de semejanza. Para abreviar escribiremos

$$\Delta ABC \approx \Delta A'B'C'$$

7.2.2 Teorema. Criterio AA de semejanza de triángulos.
Si dos triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ cumplen $\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$, entonces son semejantes.

Demostración. $\angle A \cong \angle A' \Rightarrow |\angle A| = |\angle A'|$ y $\angle B \cong \angle B' \Rightarrow |\angle B| = |\angle B'|$ por lo tanto, aplicando 5.3.14,

$180 = |\angle A| + |\angle B| + |\angle C| = |\angle A'| + |\angle B'| + |\angle C'| \Rightarrow$

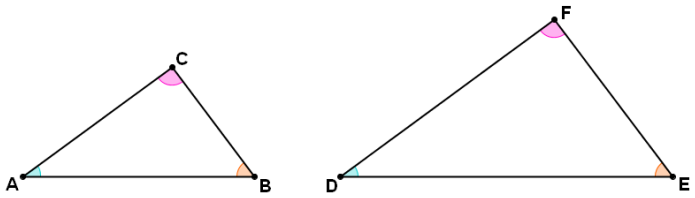
$|\angle A| + |\angle B| + |\angle C| = |\angle A| + |\angle B| + |\angle C'| \Rightarrow |\angle C| = |\angle C'| \Rightarrow \angle C \cong \angle C'$

7.2.3 Teorema. Construcción de triángulos semejantes.
Si ΔABC es un triángulo, $\overline{DE}$ un segmento y H es uno de los semiplanos fronterizos con $\overleftrightarrow{DE}$, entonces existirá un único punto $F \in H$ tal que $\Delta ABC \approx \Delta DEF$.

Demostración. Dada la semirrecta $\overrightarrow{DE}$, existirá una única semirrecta $\overrightarrow{DF}$ tal que $\angle A = \angle CAB \cong \angle FDE$, con $F \in H$.
De la misma forma, existirá una única semirrecta $\overrightarrow{EG}$ tal que $\angle B = \angle ABC \cong \angle DEF$, con $G \in H$.
$|\angle A| + |\angle B| < 180 \Rightarrow |\angle FDE| + |\angle GED| < 180$, por lo que, aplicando EP5, las rectas $\overleftrightarrow{DF}$ y $\overleftrightarrow{EG}$ se cortarán en un punto $P \in H$.

Ahora, aplicando el criterio AA de semejanza (7.1.2), $\Delta ABC \approx \Delta DEP$.

7.2.4 Teorema. La propiedad fundamental de los triángulos semejantes.
Si $\Delta ABC \approx \Delta DEF$ entonces $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$

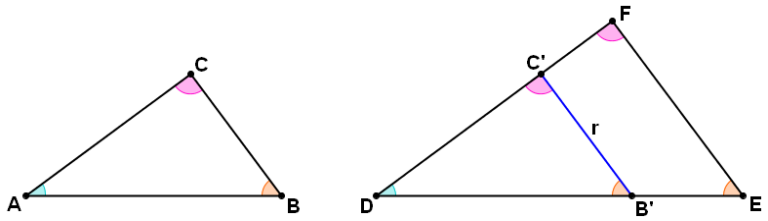


Observación. En 7.2.7 se demostrará que el recíproco también es cierto.

Demostración. Si $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ entonces $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ por SAS, y todas las razones anteriores valen 1.

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\overline{DE} > \overline{AB}$. Sea $B' \in \overline{DE}$ tal que $\overline{AB} \cong \overline{DB'}$.

Sea r la recta que pasa por B' y es paralela a $\overleftrightarrow{EF}$.



Aplicamos el teorema anterior 7.1.8, para garantizar que r pasa por un punto C' interior de $\overline{DF}$ y se cumple

$$\frac{DB'}{DE} = \frac{DC'}{DF}$$

$B'C' // EF \Rightarrow \angle DB'C' \cong \angle DEF \cong \angle ABC$, puesto que además $\angle CAB \cong \angle C'DB'$ y $\overline{AB} \cong \overline{DB'}$, por el criterio ASA tenemos que $\Delta ABC \cong \Delta DB'C'$.

Luego $\overline{DC'} \cong \overline{AC}$ y $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, y por lo tanto

$$\frac{AB}{DE} = \frac{DB'}{DE} = \frac{DC'}{DF} = \frac{AC}{DF}, \text{ es decir, } \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$$

De la misma forma demostramos la otra igualdad.

7.2.5 Corolario.

Si $\Delta ABC \approx \Delta A'B'C'$ entonces existe un $k > 0$ tal que $AB = k\,A'B'$, $AC = k\,A'C'$, y $BC = k\,B'C'$.

Demostración. Basta tomar, en el teorema anterior, $k = \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$

7.2.6 Teorema. Criterio SAS de semejanza de triángulos.

Si ΔABC y $\Delta A'B'C'$ son dos triángulos tales que $\angle A \cong \angle A'$ y $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ entonces son semejantes.

Demostración. Si $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, entonces $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ y aplicando ASA son congruentes, y por tanto semejantes.

Si $\overline{A'B'} > \overline{AB}$, sea $B'' \in A'B'$ tal que $\overline{AB} \cong \overline{A'B''}$.

Sea r la recta que pasa por B'' y es paralela a $\overleftrightarrow{B'C'}$. Aplicando el teorema 4.3.6, r cortará $\overline{A'C'}$ en un punto C'' cumpliendo $\frac{AB''}{A'B'} = \frac{A'C''}{A'C'}$

Luego

$$\frac{A'C''}{A'C'} = \frac{A'B''}{A'B'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \Rightarrow \frac{A'C''}{A'C'} = \frac{AC}{A'C'} \Rightarrow A'C'' = AC$$

Luego $\Delta ABC \cong \Delta A'B''C''$ y por tanto $\angle B = \angle B'' = \angle B'$ y $\angle A = \angle A'$.
Ahora podemos aplicar el criterio AA de semejanza (4.3.2), para concluir que $\Delta ABC \approx \Delta A'B'C'$.

7.2.7 Teorema. Criterio SSS de semejanza de triángulos.

Si ΔABC y $\Delta A'B'C'$ son dos triángulos tales que $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$ entonces son semejantes.

Demostración. Sea $B'' \in \overrightarrow{A'B'}$ tal que $\overline{AB} \cong \overline{A'B''}$, y sea $C'' \in \overrightarrow{A'C'}$ tal que $\overline{AC} \cong \overline{A'C''}$. Entonces

$$\frac{A'B''}{A'B'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{A'C''}{A'C'} \Rightarrow \frac{A'B''}{A'B'} = \frac{A'C''}{A'C'}$$

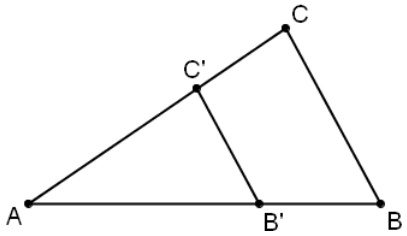
Y aplicando el anterior criterio SAS de semejanza, $\Delta A'B''C'' \approx \Delta A'B'C'$, luego $\frac{C''B''}{C'B'} = \frac{A'B''}{A'B'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \Rightarrow \frac{C''B''}{C'B'} = \frac{BC}{B'C'} \Rightarrow C''B'' = BC$, y aplicando el criterio SSS de congruencia de triángulos, $\Delta A'B''C'' \cong \Delta ABC$, y por tanto

$$\Delta ABC \cong \Delta A'B''C'' \approx \Delta A'B'C'.$$

7.3 El Teorema de Tales.

7.3.1 Definición. Triángulos en posición de Tales.

Diremos que dos triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ están en posición de Tales cuando, nombrando los vértices adecuadamente, $A = A'$, B' está en el segmento $\overline{AB}$ y el lado $\overline{B'C'}$ es paralelo a $\overline{BC}$.

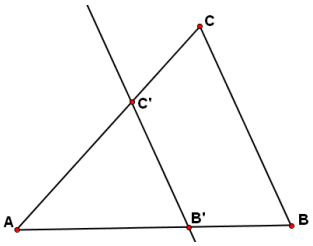


Observación: El punto C' estará en el segmento $\overline{AC}$, pues $\overleftrightarrow{B'C'}$ no puede cortar a $\overleftrightarrow{BC}$ y aplicamos el Teorema de Pasch (1.3.5) al triángulo ΔABC.

7.3.2 Teorema. Teorema de Tales.

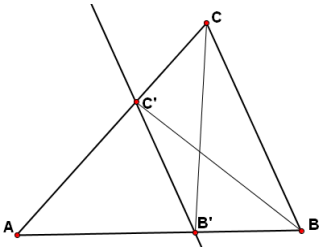
En un triángulo ABC trazamos una recta que cortará el lado AC en C' y el lado AB en B'. La recta B'C' será paralela a BC si y sólo si los segmentos determinados son proporcionales:

$$\frac{B'B}{AB'} = \frac{C'C}{AC'}$$



Es decir, dos triángulos están en posición de Tales si y sólo si son semejantes.

Demostración. Supongamos que $B'C' // BC$. Trazamos las rectas BC' y B'C.



Los triángulos B'BC' y C'CB' tienen la misma área: $\alpha(B'BC') = \alpha(C'CB')$, pues comparten una misma base y tienen la misma altura (5.3.4)

Por otro lado, los triángulos AB'C' y B'BC' comparten una misma altura, luego sus áreas serán proporcionales a las bases (5.3.5):

$$\frac{\alpha(AB'C')}{\alpha(B'BC')} = \frac{AB'}{B'B}$$

De la misma manera observamos que los triángulos AC'B' y C'CB' comparten una misma altura, luego sus áreas serán proporcionales a las bases respectivas:

$$\frac{\alpha(AC'B')}{\alpha(C'CB')} = \frac{AC'}{C'C}$$

Así pues, $\frac{AB'}{B'B} = \frac{\alpha(AB'C')}{\alpha(B'BC')} = \frac{\alpha(AB'C')}{\alpha(C'CB')} = \frac{AC'}{C'C}$, tal y como queríamos ver.

Para el recíproco $\frac{B'B}{AB'} = \frac{C'C}{AC'} \Rightarrow B'C' // BC$, basta observar que todos los resultados anteriores son reversibles.
Fuente de la demostración: http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/GeoGebra/ThalesTheorem.shtml

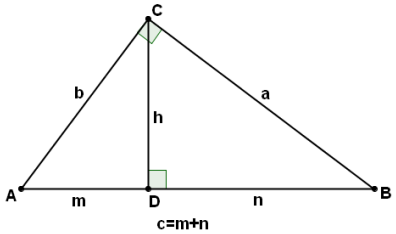
7.3.3 Teorema.
En geometría euclídea se cumple el **postulado de la división de segmentos** (4.4.6).

Demostración. Sea $\overline{AB}$ un segmento y n un número entero positivo $n \geq 1$.
Sea P_1 un punto que no pertenece a la recta $\overleftrightarrow{AB}$ (1.1.14)
Sobre la semirrecta $\overrightarrow{AP_1}$ podemos definir los puntos $P_2, P_2, P_3, P_4, ..., P_n$, de forma que $\overline{P_kP_{k+1}} \cong \overline{AP_1}$,
Trazamos ahora la recta $\overleftrightarrow{BP_n}$, y las rectas que pasan por cada P_k y son paralelas a $\overleftrightarrow{BP_n}$.
Cada una de estas rectas determinará un punto Q_k de intersección con $\overline{AB}$.
Los puntos $Q_1, Q_2, ..., Q_n$ dividirán el segmento en n partes iguales.

7.4 El Teorema de Pitágoras.

7.4.1 Teorema. El teorema del cateto.

Sea ABC un triángulo rectángulo en C y trazamos su altura CD correspondiente al vértice C. Internamente quedan determinados dos triángulos también rectángulos ACD y BCD:



El triángulo ADC es similar al triángulo ABC porque ambos son triángulos rectángulos y comparten el mismo ángulo en A.

Por lo tanto $\frac{b}{c} = \frac{m}{b} \Rightarrow b^2 = m \cdot c$

Y de la misma forma el triángulo BCD es similar al triángulo ABC porque ambos son triángulos similares compartiendo el mismo ángulo en B.

Por lo tanto $\frac{a}{c} = \frac{n}{a} \Rightarrow a^2 = n \cdot c$

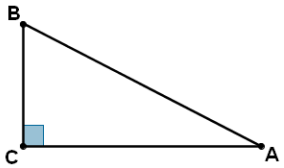
7.4.2 Teorema. El teorema de la altura.

Por ser los dos triángulos ADC y DBC similares entre ellos (ambos son similares a ABC), tenemos que

$$\frac{m}{h} = \frac{h}{n} \Rightarrow h^2 = m \cdot n$$

7.4.3 Teorema. El teorema de Pitágoras. (Elementos 1.47)

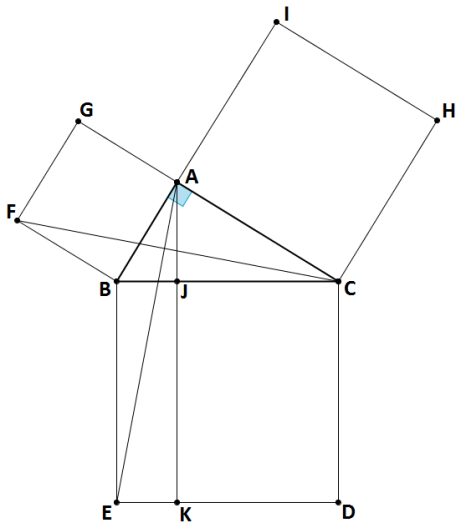
En todo triángulo ΔABC rectángulo en C se cumple $AB^2 = BC^2 + AC^2$.



Demostración: La fórmula se deduce fácilmente de los teoremas anteriores:

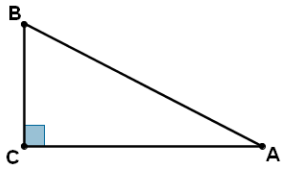
$$a^2 + b^2 = n \cdot c + m \cdot c = (n + m) \cdot c = c \cdot c = c^2$$

Demostración de Elementos 1.47: Sea ΔABC un triángulo rectángulo en A. Construimos los cuadrados $\Diamond BCDE$, $\Diamond ABFG$ y $\Diamond ACHI$ sobre cada uno de los tres lados.



Los puntos G, A y C están alineados pues forman ángulos suplementarios (2.3.4).
De la misma forma deducimos que los puntos B, A y I están alineados.
Puesto que $\angle CBE \cong \angle ABF$ (ambos son rectos), tenemos que
$\angle ABE = \angle ABC + \angle CBE \cong \angle ABC + \angle ABF = \angle CBF$
pero también $\overline{BC} \cong \overline{BE}$ y $\overline{BA} \cong \overline{BF}$ pues son cuadrados, luego por el criterio SAS de congruencia de triángulos deducimos que $\Delta FBC \cong \Delta ABE$.
Trazamos la recta paralela a $\overleftrightarrow{BE}$ por A, que cortará a $\overline{BC}$ en el punto J y a $\overline{ED}$ en el punto K.
El área del rectángulo $\Diamond BEKJ$ es el doble de la del triángulo ΔABE, pues ambos tienen la misma base $\overline{BE}$ y están delimitados por las mismas rectas paralelas $\overleftrightarrow{BE} // \overleftrightarrow{AK}$.
De la misma forma, el área del cuadrado $\Diamond FBAG$ es el doble de la del triángulo ΔFBC, pues ambos tienen la misma base $\overline{FB}$ y están delimitados por las mismas rectas paralelas $\overleftrightarrow{FB} // \overleftrightarrow{CG}$.
Y puesto que acabamos de ver que ambos triángulos son congruentes, tendrán la misma área, por lo que el rectángulo $\Diamond BEKJ$ tendrá el mismo área que el cuadrado $\Diamond FBAG$.
(En este punto Euclides utiliza la noción común "si dos cosas son iguales sus dobles también serán iguales" sin haberla declarado previamente)
De la misma se demuestra que el área del rectángulo $\Diamond JCDK$ es igual al área del cuadrado $\Diamond ACHI$.
Puesto que el cuadrado $\Diamond BCDE$ es unión disjunta de los rectángulos $\Diamond BEKJ$ y $\Diamond ACHI$, su área será la suma de ambos, es decir, de los cuadrados $\Diamond FBAG$ y $\Diamond ACHI$, tal y como queríamos ver.

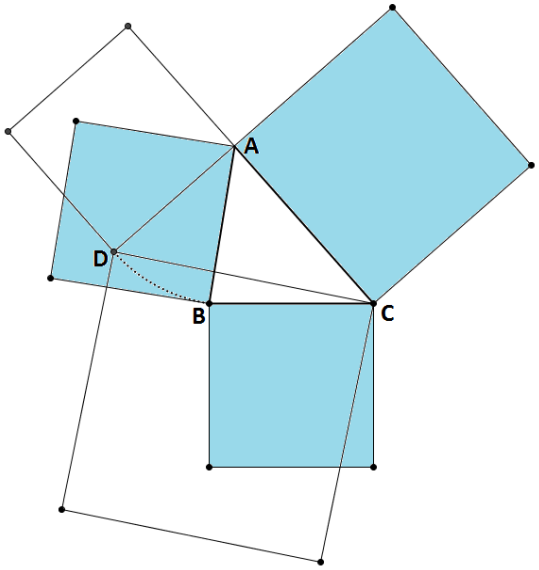
7.4.4 Teorema. El recíproco del teorema de Pitágoras. (Elementos 1.48)
Todo triángulo ΔABC que cumpla $AB^2 = BC^2 + AC^2$ es rectángulo en el vértice C.



Demostración: Sea un triángulo ΔABC.
Tomamos las medidas de sus lados: $a = BC$, $b = AC$, y $c = AB$.

Sabemos que se cumple $a^2+b^2=c^2$.
Construimos un triángulo $\Delta A'B'C'$ rectángulo con los catetos a y b.
En este triángulo podemos aplicar el teorema de Pitágoras:
$(A'B')^2=(A'C')^2+(B'C')^2=b^2+a^2=c^2\Rightarrow(A'B')^2=c^2\Rightarrow A'B'=c$
Y por tanto podemos aplicar el criterio SSS de semejanza de triángulos:
$\Delta ABC\approx\Delta A'B'C'$, y por tanto $\angle C'=\angle C$ será recto.

Demostración de Elementos 1.48:
Por comodidad denotaremos por $\Diamond AB$ el cuadrado construido sobre el segmento $\overline{AB}$, y denotemos por $\alpha(\Diamond AB)$ su área.
Sea ΔABC un triángulo en el cual se cumple $\alpha(\Diamond BC)=\alpha(\Diamond AB)+\alpha(\Diamond AC)$. Queremos ver que $\angle BAC$ es un ángulo recto.
Trazamos la perpendicular al lado $\overline{AC}$ y sea D un punto de dicha perpendicular tal que $\overline{AD}\cong\overline{AB}$.

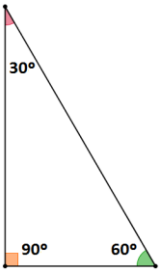


Puesto que $\overline{AD}\cong\overline{AB}$ se deduce que $\alpha(\Diamond AD)=\alpha(\Diamond AB)$.
Puesto que el triángulo ΔADC es recto en A, podemos aplicar en este triángulo el Teorema de Pitágoras para deducir que $\alpha(\Diamond CD)=\alpha(\Diamond AD)+\alpha(\Diamond AC)$, luego
$\alpha(\Diamond CD)=\alpha(\Diamond AD)+\alpha(\Diamond AC)=\alpha(\Diamond AB)+\alpha(\Diamond AC)=\alpha(\Diamond BC)$
Luego $\alpha(\Diamond CD)=\alpha(\Diamond BC)$ y por tanto $\overline{CD}\cong\overline{BC}$ (aquí Euclides aplica la propiedad de que si dos cuadrados tienen la misma área entonces tienen el mismo lado sin haberla demostrado antes)
Así pues, $\overline{CD}\cong\overline{BC}$, $\overline{AD}\cong\overline{AB}$ y $\overline{AC}\cong\overline{AC}$, luego podemos aplicar el criterio SSS de congruencia de triángulos para deducir que $\Delta ADC\cong\Delta ABC$, y por tanto $\angle BAC\cong\angle DAC$ que es un ángulo recto.

7.5 Algunas figuras notables.

7.5.1 Teorema. El teorema del triángulo 30-60-90.

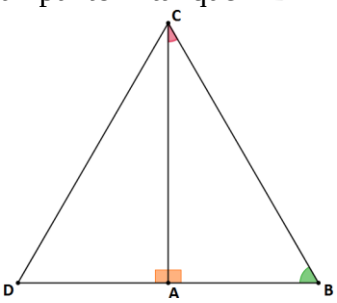
Un triángulo ΔABC tiene ángulos 30º-60º-90º si y sólo si es un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide el doble que el cateto más corto.



Demostración.

Sea un triángulo ΔABC tal que $\angle A = 90º$, $\angle B = 60º$ y $\angle C = 30º$.

Prolongamos el lado AB hasta un punto D tal que $AD = AB$.



Los triángulos ΔDAC y ΔBAC son congruentes por el criterio SAS.

Por lo tanto $\angle BDC = \angle ADC = \angle ABC = 60º$ y $\angle DCA = \angle ACB = 30º$.

Así pues, $\angle DCB = \angle DCA + \angle ACB = 30º + 30º = 60º$, es decir, el triángulo ΔDCB es equiangular, luego equilátero por 3.8.6, por lo que BC=DB=2AB como queríamos ver.

Recíprocamente, supongamos que tenemos un triángulo rectángulo ΔABC, con $\angle A = 90º$ y $BC = 2AB$.

Como hemos hecho anteriormente, prologamos el lado AB hasta un punto D tal que $AD = AB$. Los triángulos ΔDAC y ΔBAC son congruentes por el criterio SAS. Luego $DC = BC$. Y puesto que también $DB = DA + AB = 2AB = BC$, el triángulo ΔDCB será equilátero, y por tanto equiangular por 3.8.6, por lo que $\angle A = \angle ABC = \angle DBC = 60º$.

Por último, $\angle C = 180 - \angle A - \angle B = 180 - 90 - 60 = 30º$.

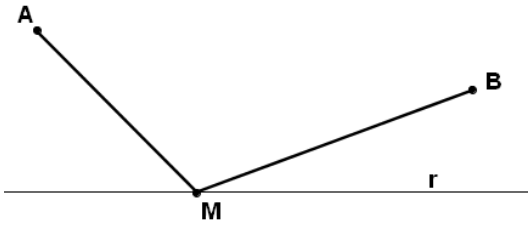
7.5.2 Teorema. El teorema del triángulo 45-45-90.

Un triángulo ΔABC tiene ángulos 45º-45º-90º si y sólo si es un triángulo rectángulo isósceles.

Demostración. $\Rightarrow$ Por definición. $\Leftarrow$ Si es isósceles tendrá dos ángulos iguales y por ser un triángulo rectángulo el tercero será de 90º. Luego $2\alpha + 90º = 180º \Rightarrow \alpha = 45º$

7.5.3 Proposición. El Problema de Herón.

Dos puntos A y B se encuentran al mismo lado de una recta r. Queremos encontrar un punto M en r para el cual la suma de distancias de A a M y de M a B sea mínima.

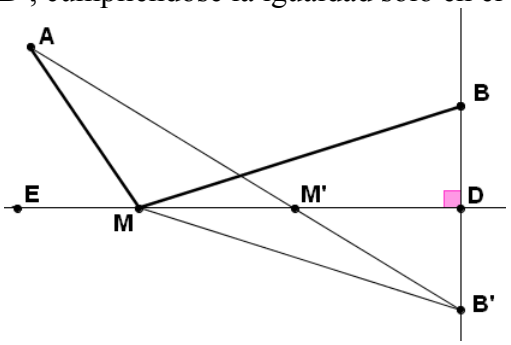


Solución.

Sea B' el punto simétrico de B respecto de r.

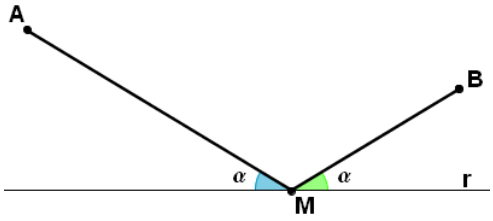
Sea M' el punto de intersección entre AB' y la recta r.

Tenemos $MB = MB'$, y por la desigualdad triangular (3.4.16) aplicada al triángulo $\Delta AMB'$, $AM + MB' \geq AB'$, cumpliéndose la igualdad sólo en el caso M=M'.



Añadimos un par de puntos E y D de la recta para denotar cómodamente los ángulos.

El punto $M' = AB' \cap r$ está caracterizado por cumplir $\angle AM'E = \angle DM'B'$, y puesto que $\angle DM'B' = \angle DM'B$, para cualquier punto M' de r, llegamos a la caracterización de M' como el punto de r para el cual $\angle AM'E = \angle DM'B$, es decir, el ángulo "de entrada" (ángulo de incidencia) es igual al ángulo "de salida" (ángulo de reflexión).



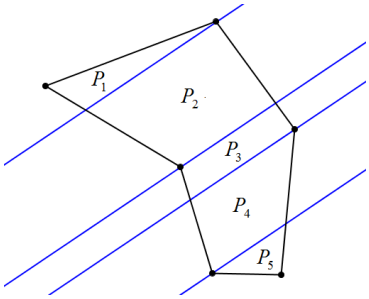
Fuente:

7.6 Tijeras-congruencia de polígonos.

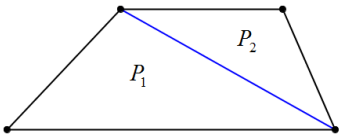
Recordemos la descomposición de polígonos introducida en 7.1.1. El objetivo de este apartado será demostrar el teorema Bolyai-Gerwien de 1833, que afirma que dos polígonos con el mismo área son tijeras-congruentes.

7.6.1 Proposición.
Todo polígono se puede descomponer en triángulos (de hecho, en triángulos agudos).

Demostración.
Tomamos un polígono P y fijamos una recta m que no sea paralela a ninguno de los lados. Trazando paralelas a m por los vértices el polígono quedará descompuesto en triángulos y trapecios.



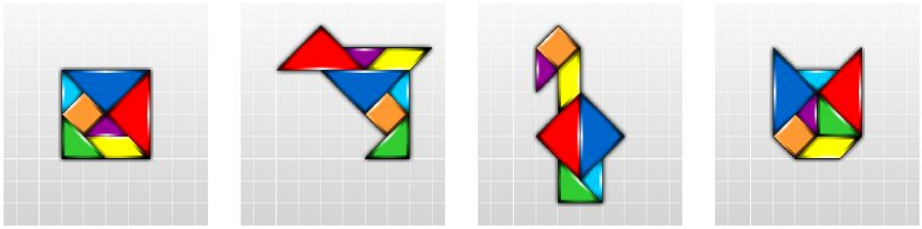
Y todo trapecio se descompone en dos triángulos trazando su diagonal:



7.6.2 Definición. Polígonos tijeras-congruentes. ("scissors congruent")
Diremos que dos polígonos P y Q son tijeras-congruentes si existen sendas descomposiciones $P = P_1 + P_2 + ... + P_n$ y $Q = Q_1 + Q_2 + ... + Q_n$ con el mismo número de elementos y tales que $P_i \cong Q_i$ para todo $1 \leq i \leq n$.
Es decir, cuando podamos descomponer los dos polígonos en la misma cantidad de "piezas" congruentes dos a dos, en cuyo caso escribiremos

$$P \sim \mathrm{Q}$$

Un ejemplo precioso de esta idea lo encontramos en el Tangram:



Todas estas figuras (polígonos) son tijeras-congruentes

7.6.3 Proposición.
Dos polígonos tijeras-congruentes tienen la misma área.

$$P \sim \mathrm{Q} \Rightarrow \alpha(P) = \alpha(Q)$$

Observación.
El recíproco también es cierto. Se conoce como Teorema Bolyai-Gerwien (1833): Dos polígonos con la misma área son tijeras-congruentes.

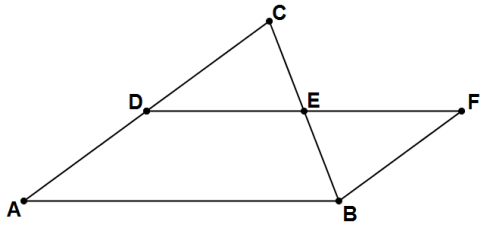
Demostración.
Basta aplicar los axiomas A1 y A2 definidos en 7.1.2.

7.6.4 Proposición.
La tijeras-congruencia es una relación de equivalencia entre polígonos.

Demostración.
Las propiedades reflexiva y simétrica se cumplen claramente. Veamos la transitiva.
Si $P \sim \mathrm{Q}$ entonces $P = P_1 + P_2 + ... + P_n$, $Q = Q_1 + Q_2 + ... + Q_n$ con $P_i \cong Q_i \forall i$.
Si $Q \sim \mathrm{R}$ entonces $Q = Q_1' + Q_2' + ... + Q_m'$, $R = R_1 + R_2 + ... + R_m$ con $Q_i' \cong R_i \forall i$.
El problema es que no necesariamente se cumple $n = m$. Pero tomando todas las intersecciones $Q_i' \cap Q_j$ con $1 \le i \le n$ y $1 \le j \le m$, podemos llegar a desmontar P y R en piezas congruentes.

7.6.5 Proposición.
Todo triángulo es tijeras-congruente con un paralelogramo que tiene la misma base y la mitad de su altura.

Demostración.
Sea el triángulo ΔABC. Sea D el punto medio del segmento $\overline{AC}$ y E el punto medio del segmento $\overline{BC}$. La recta $\overleftrightarrow{DE}$ será paralela a $\overleftrightarrow{AB}$. Sea F el punto de $op(\overrightarrow{ED})$ tal que $\overline{DE} \cong \overline{EF}$. Claramente $\Delta ECD \cong \Delta EBF$ (Criterio SAS) y por tanto $\alpha(\Delta ABC) = \alpha(\Diamond ABFD)$.



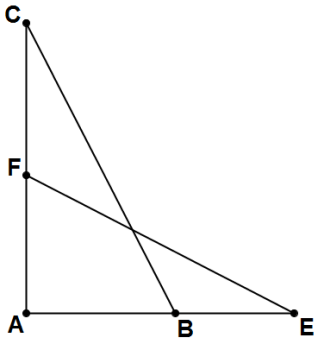
7.6.6 Corolario.
Dos triángulos con igual base y altura son tijeras-congruentes.

Demostración.
Ambos serán tijeras-congruentes con un mismo paralelogramo, y por lo tanto basta aplicar la propiedad transitiva de la tijera-congruencia.

7.6.7 Corolario.
Dos triángulos rectángulos con igual área son tijeras-congruentes.

Demostración.

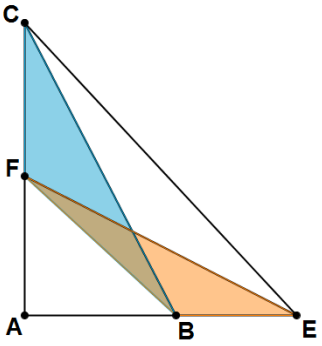
Sean el triángulo ΔABC rectángulo en A, y el triángulo ΔDEF rectángulo en D.
Supongamos que $|DE| > |AB|$. Puesto que tienen la misma área, entonces $|DF| < |AC|$.
Superponemos ambos obteniendo la siguiente figura:



$$\alpha(\Delta ABC) = \alpha(\Delta AEF) \Leftrightarrow \frac{|AB| \cdot |AC|}{2} = \frac{|AE| \cdot |AF|}{2} \Leftrightarrow |AB| \cdot |AC| = |AE| \cdot |AF|$$

$$\Leftrightarrow \frac{|AC|}{|AF|} = \frac{|AE|}{|AB|}$$

Por lo tanto, los triángulos ΔABF y ΔAEC son semejantes (Criterio SAS de semejanza).
Luego $\overleftrightarrow{BF}$ y $\overleftrightarrow{CE}$ son paralelas (Teorema de Tales).
Ahora, aplicando el corolario anterior, los triángulos ΔFBC y ΔFBE serán tijeras-congruentes, pues comparten ambos base y altura.

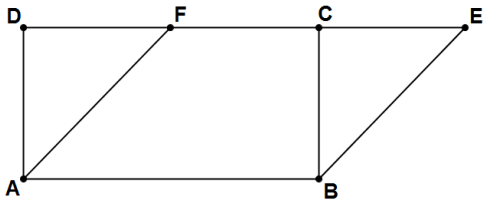


Finalmente, y utilizando las propiedades básicas de la tijera-congruencia,

$$\Delta AEF = \Delta ABF + \Delta BEF \sim \Delta ABF + \Delta FBC = \Delta ABC$$

7.6.8 Proposición.
Todo paralelogramo es tijeras-congruente como un rectángulo con la misma base y la misma altura.

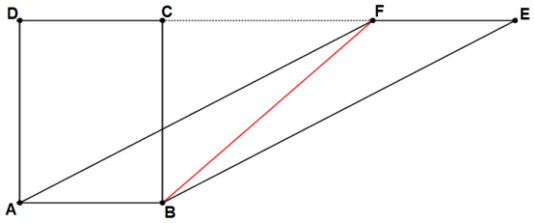
Demostración.
Sea el rectángulo $\Diamond ABCD$ y el paralelogramo $\Diamond ABEF$, con la misma altura.
Supongamos que $|\overline{DF}| < |\overline{DC}|$:



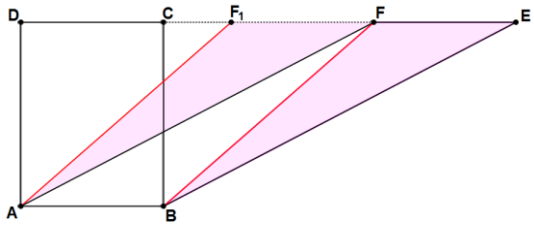
Entonces $\overline{DF} = \overline{DE} - \overline{FE} = \overline{DE} - \overline{AB} = \overline{DE} - \overline{DC} = \overline{CE}$ y por tanto los triángulos rectángulos ΔADF y ΔBCE son congruentes.
$\Delta ABCD = \Delta ABCF + \Delta ADF \sim \Delta ABCF + \Delta BCE = \Delta ABEF$

Consideremos ahora el caso $\left|\overline{DF}\right| > \left|\overline{DC}\right|$:

Trazamos la diagonal $\overline{BF}$ del paralelogramo:



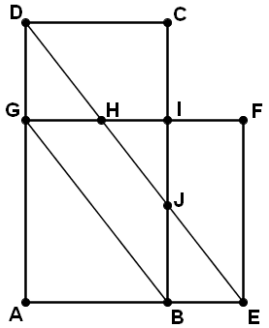
Determinamos el punto F_1 en $op(\overrightarrow{FE})$ tal que $\left|\overline{FE}\right| = \left|\overline{FF_1}\right|$.



El paralelogramo $\Diamond ABEF$ será tijeras-congruente con el nuevo paralelogramo $\Diamond ABFF_1$. Repitiendo este proceso tantas veces como sea necesario (exactamente $n = [DF / DC]$), llegaremos a un punto F_n tal que $\left|\overline{DF_n}\right| < \left|\overline{DC}\right|$ y podemos aplicar la primera parte de esta demostración.

7.6.9 Proposición.
Dos rectángulos con el mismo área son tijeras-congruentes.

Demostración. Sean los rectángulos $\Diamond ABCD$ y $\Diamond AEFG$ con el mismo área, que los vamos a suponer superpuestos el uno sobre el otro. Trazamos los segmentos $\overline{DE}$ y $\overline{GB}$, y los puntos de intersección indicados para obtener la figura siguiente:



$\alpha(\Diamond ABCD) = \alpha(\Diamond AEFG) \Rightarrow AB \cdot AD = AE \cdot AG \Rightarrow \dfrac{AD}{AG} = \dfrac{AE}{AB}$

Luego los triángulos ΔABG y ΔAED son semejantes por el criterio SAS de semejanza.

Por lo tanto, por el Teorema de Tales, $\overleftrightarrow{GB} // \overleftrightarrow{DE}$.

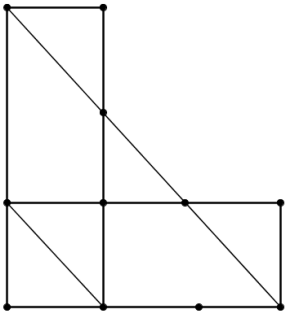
Luego $\Diamond DGBJ$ es un paralelogramo, y por lo tanto $\overline{DG} = \overline{BJ}$, de lo que se deduce que $\overline{JC} = \overline{AG}$.

De la misma forma $\Diamond BEHG$ es un paralelogramo, y por lo tanto $\overline{GH} = \overline{BE}$ y en consecuencia $\overline{HF} = \overline{AB}$.

De todo esto deducimos que $\Delta GHD \cong \Delta BEJ$ y $\Delta DCJ \cong \Delta HFE$.

Moviendo las polígonos ΔGHD a ΔBEJ y ΔDCJ a ΔHFE vemos que $\Diamond ABCD$ y $\Diamond AEFG$ son tijeras-congruentes.

Observación: El razonamiento anterior no sirve si $\overline{AE} > 2\overline{AB}$:



Pero todo rectángulo de altura a y base b es claramente tijeras-congruente con un rectángulo de base b/2 y altura 2a, basta con cortarlo por la mitad, luego en el caso $\overline{AE} > 2\overline{AB}$ podemos cortar el rectángulo $\Diamond AEFG$ tantas veces como haga falta hasta garantizar que $\overline{AB} < \overline{AE} < 2\overline{AB}$.

7.6.10 Corolario.

Todo rectángulo es tijeras-congruente con un rectángulo de base 1 y altura igual a su área.

Demostración. Dado un rectángulo $\Diamond ABCD$, con área $a = \alpha(\Diamond ABCD) = \overline{AB} \cdot \overline{BC}$, tomamos un rectángulo de base 1 y altura a, que claramente tendrá la misma área que el primero. Por la proposición anterior, serán tijeras-congruentes.

7.6.11 Corolario.

Todo polígono es tijeras-congruente con un rectángulo de lado 1 y altura igual a su área.

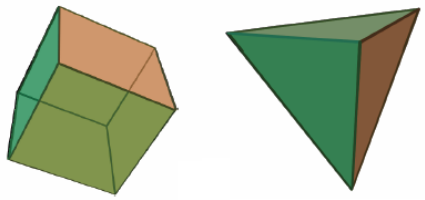
Demostración.
Todo polígono se puede descomponer en triángulos (7.7.1). Cada triángulo es tijeras-congruente con un paralelogramo (7.7.5) y todo paralelogramo es tijeras-congruente con un rectángulo (7.7.8). Finalmente, todo rectángulo es tijeras-congruente con un rectángulo de base 1 y altura igual a su área (7.7.11). Con todo esto deducimos que un polígono es tijeras-congruente con un rectángulo de base 1 y altura igual a su área.

7.6.12 Corolario. Bolyai-Gerwien (1833).
Dos polígonos con el mismo área son tijeras-congruentes.

Demostración.
Por el corolario anterior, ambos serán tijeras-congruentes con un mismo rectángulo de lado 1 y altura el área común.

7.6.13 Nota histórica. El tercer problema de Hilbert.
Todo el desarrollo anterior para polígonos se puede hacer en el espacio para poliedros. Diremos que dos poliedros son tijeras-congruentes cuando se puedan "descomponer" en el mismo número de poliedros iguales. Claramente, si dos poliedros son tijeras-congruentes, tendrán el mismo volumen, ¿pero dos poliedros con el mismo volumen serán tijeras congruentes, como pasa en el plano con el área?
Hilbert, en su célebre conferencia del Congreso Internacional de Matemáticas de París del 1902, propuso 23 problemas abiertos para resolver en el siglo XX. El tercer problema fue precisamente este.

Hilbert ya dejó claro en su momento que esperaba una solución negativa, pero fue el matemático **Max Dehn** quién en 1902 demostró que un tetraedro regular y un cubo con igual volumen no son tijeras-congruentes, introduciendo el "**invariante de Dehn**".



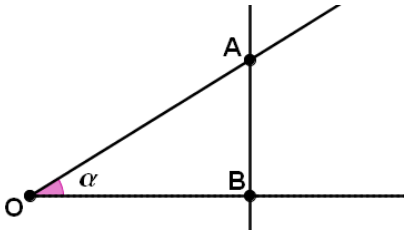
7.6.14 Nota histórica. La paradoja Banach–Tarski.
En 1924, Stefan Banach y Alfred Tarski demostraron que es posible tomar una esfera sólida, desmontarla en un número finito de piezas y volverlas a montar obteniendo dos esferas idénticas a la primera.
Este resultado se suele presentar como "paradoja" porque contradice la intuición geométrica.

8 Trigonometría.

8.1 Las razones trigonométricas.

8.1.1 Definición. Razones trigonométricas de ángulos agudos.

Sea un ángulo agudo α. Sea A un punto arbitrario de uno de sus lados y sea B el pie de la perpendicular al lado opuesto de A.



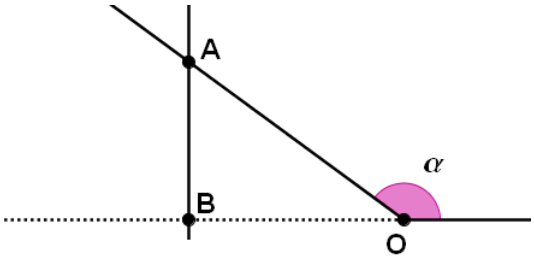
El triángulo ΔAOB tendrá un ángulo recto y otro igual a α, luego sus ángulos serán independientes de la elección del punto A. Si tomamos puntos distintos obtendremos triángulos semejantes, luego podemos definir el seno y el coseno de α como las razones

$$sen(\alpha)=\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{OA}|},\ \cos(\alpha)=\frac{|\overline{OB}|}{|\overline{OA}|}\ \text{ y }\ \tan(\alpha)=\frac{|\overline{BA}|}{|\overline{OB}|}\ si\ |\overline{OB}|>0$$

Observamos que podemos tomar el punto A a una unidad de distancia de O, y entonces el seno y el coseno de α son simplemente las longitudes de $\overline{AB}$ y $\overline{OB}$.

8.1.2 Definición. Razones trigonométricas de ángulos obtusos.

Las definiciones de seno y coseno valen tal cual para ángulos obtusos, pero en este caso convendremos en que **el coseno tiene signo negativo**.



8.1.3 Teorema. La propiedad fundamental de la trigonometría.

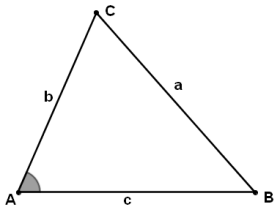
$$sen^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$$

Demostración.

$$AB^2=BC^2+AC^2\Rightarrow 1=\frac{AB^2}{AB^2}=\frac{BC^2+AC^2}{AB^2}=$$

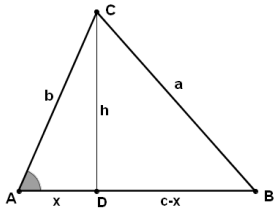
$$=\frac{BC^2}{AB^2}+\frac{AC^2}{AB^2}=\left(\frac{BC}{AB}\right)^2+\left(\frac{AC}{AB}\right)^2=\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)$$

8.1.4 Teorema. El Teorema del coseno.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

Demostración: Lanzamos la perpendicular por AB a C. Sea D su punto de corte con AB.



Aplicando Pitágoras al triángulo rectángulo ADC tenemos: $x^2 + h^2 = b^2$ (1)

Y de la misma forma aplicando Pitágoras al triángulo BDC: $(c-x)^2 + h^2 = a^2$

Por lo tanto:

$$(c-x)^2 + h^2 = a^2 \Rightarrow$$

$$c^2 + x^2 - 2cx + h^2 = a^2 \Rightarrow (1)$$

$$b^2 + c^2 - 2cx = a^2$$

Por definición de coseno: $\cos A = \dfrac{x}{b} \Rightarrow x = b\cos A$

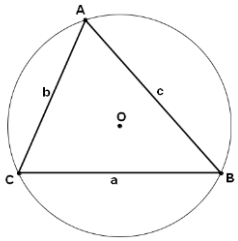
Y substituyendo en la igualdad anterior llegamos a: $b^2 + c^2 - 2bc\cos A = a^2$

Podemos realizar una demostración similar en el caso que el triángulo ABC sea obtuso.

8.1.5 Teorema. El teorema del seno.

En el apartado 10.2.10 se demostrará el siguiente resultado:

Sea ABC un triángulo y O el centro de su circunferencia circunscrita. Sea r el radio de esta circunferencia.

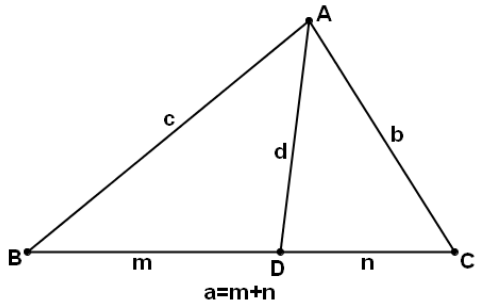


$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2r$$

8.1.6 Corolario. Teorema de Stewart.

Dado el triángulo ABC, sean a, b, c las longitudes de los lados BC, AC y AB, respectivamente. Sea D un punto dentro del segmento BC. Si BD = m, CD = n y AD = d, se cumple que:

$$d^2a = b^2m + c^2n - mna$$



Demostración.

Sea $\alpha = \angle BDA$, y $\beta = \angle CDA$. Puesto que son suplementarios, $\cos(\beta) = -\cos(\alpha)$.

Aplicamos el teorema del coseno (8.1.4) a los triángulos ΔABD y ΔADC

En ΔABD: $c^2 = m^2 + d^2 - 2md\cos(\alpha)$

En ΔADC:

$$b^2 = n^2 + d^2 - 2nd\cos(\beta) \Leftrightarrow b^2 = n^2 + d^2 + 2nd\cos(\alpha) \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{b^2 - n^2 - d^2}{2nd}$$

$$c^2 = m^2 + d^2 - 2md\cos(\alpha) \Leftrightarrow c^2 = m^2 + d^2 - 2md\,\frac{b^2 - n^2 - d^2}{2nd}$$

$$\Leftrightarrow c^2 - m^2 - d^2 = m\frac{n^2 + d^2 - b^2}{n}$$

$$\Leftrightarrow nc^2 - nm^2 - nd^2 = mn^2 + md^2 - mb^2$$

$$\Leftrightarrow nc^2 - nm^2 - mn^2 + mb^2 = md^2 + nd^2$$

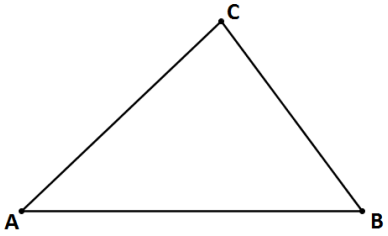
$$\Leftrightarrow nc^2 + mb^2 - (nm^2 + mn^2) = (m+n)d^2$$

$$\Leftrightarrow nc^2 + mb^2 - nm(m+n) = ad^2$$

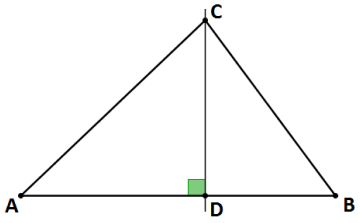
$$\Leftrightarrow nc^2 + mb^2 - nma = ad^2$$

8.1.7 Teorema. Área del triángulo mediante trigonometría.

Sea un triángulo ΔABC. Entonces $\alpha(\Delta ABC) = \dfrac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2}$



Demostración. Trazamos una perpendicular $\overline{CD}$ por el vértice C del triángulo.



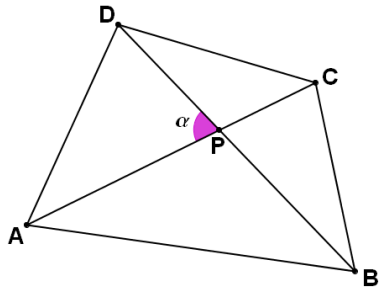
Luego ΔACD será un triángulo rectángulo y por tanto

$\sin A = \frac{CD}{AC} \Rightarrow CD = AC \sin A$, y por tanto $\alpha(\Delta ABC) = \frac{AB \cdot CD}{2} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2}$

Observación: Aunque hemos demostrado este teorema para el caso en que el triángulo es agudo, un razonamiento similar sirve para los casos de triángulos rectángulos y obtusos.

8.1.8 Corolario. Área de un cuadrilátero.

El área de un cuadrilátero es igual a 1/2 del producto de las diagonales por el seno del ángulo que comprenden.



$$Área(\Diamond ABCD) = \frac{AC \cdot BD \cdot sen\alpha}{2}$$

Demostración.

Sea P el punto de corte de las dos diagonales. Sea $\alpha = \angle DPA$.

$Área(\Delta DAC) = Área(\Delta DPA) + Área(\Delta DPC) =$

$= \frac{DP \cdot PA \cdot sen\alpha}{2} + \frac{DP \cdot PC \cdot sen(180 - \alpha)}{2} =$

$= \frac{DP \cdot PA \cdot sen\alpha}{2} + \frac{DP \cdot PC \cdot sen(\alpha)}{2} =$

$= \frac{DP \cdot sen\alpha \cdot (PA + PC)}{2} = \frac{DP \cdot sen\alpha \cdot (AC)}{2} = \frac{AC \cdot DP \cdot sen\alpha}{2}$

De la misma forma

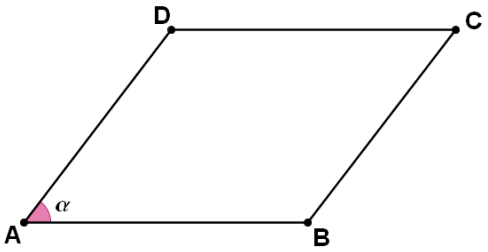
$$Área(\Delta BAC) = \frac{AC \cdot PB \cdot sen\alpha}{2}$$

Y por tanto

$Área(\Diamond ABCD) = Área(\Delta DAC) + Área(\Delta BAC) =$

$= \frac{AC \cdot DP \cdot sen\alpha}{2} + \frac{AC \cdot PB \cdot sen\alpha}{2} = \frac{AC \cdot sen\alpha \cdot (DP + PB)}{2} = \frac{AC \cdot sen\alpha \cdot DB}{2}$

8.1.9 Proposición. Área de un paralelogramo en función de sus lados.



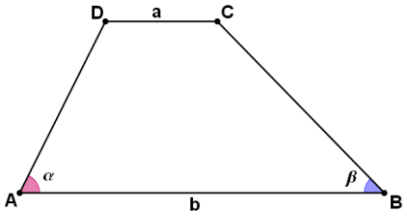
$$Área(\Diamond ABCD) = \frac{AB \cdot AD \cdot \sin\alpha}{2}$$

Demostración.

Trazamos la diagonal $\overline{BD}$ que descompone el paralelogramo en dos triángulos congruentes, y por tanto con la misma área.

$$Área(\Diamond ABCD) = 2Área(\Delta ABD) = 2\frac{AB \cdot AD \cdot \sin\alpha}{2} = AB \cdot AD \cdot \sin\alpha$$

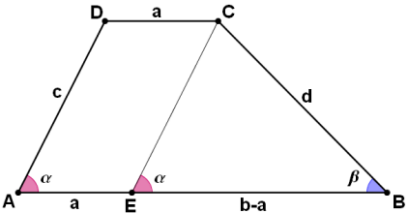
8.1.10 Proposición. Área de un trapecio en función de sus bases y sus ángulos.



$$Área(\Diamond ABCD) = \frac{(b^2 - a^2)\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$$

Demostración.

Trazamos la paralela a AD por C que cortará a AB en un punto E.



$$Área(\Diamond ABCD) = Área(\Diamond AECD) + Área(\Diamond EBC) =$$

$$= a \cdot c \cdot \sin\alpha + \frac{c \cdot (b-a) \cdot \sin\alpha}{2} = c \cdot \sin\alpha \cdot \left(a + \frac{b-a}{2}\right) =$$

$$= c \cdot \sin\alpha \cdot \left(a + \frac{b}{2} - \frac{a}{2}\right) = \frac{c \cdot (a+b)\sin\alpha}{2} = (1)$$

Por otro lado, aplicando la fórmula del seno,

$\frac{c}{\sin\beta} = \frac{b-a}{\sin(180-(\alpha+\beta))} \Leftrightarrow c = \frac{(b-a)\sin\beta}{\sin(180-(\alpha+\beta))} = \frac{(b-a)\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, y por tanto

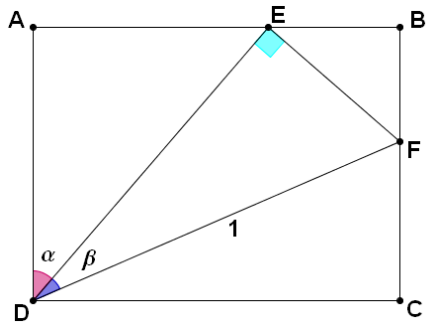
$$(1)=\frac{(a+b)(b-a)\sin\alpha\sin\beta}{2}=\frac{(b^2-a^2)\sin\alpha\sin\beta}{2}$$

8.1.11 Teorema. Fórmulas trigonométricas para la suma de ángulos.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\beta\cdot\cos\alpha-\sin\beta\sin\alpha$$
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

Demostración. Sean α y β dos ángulos tales que $a,\beta,a+\beta<90$. Construimos un rectángulo $\Diamond ABCD$ con un punto E en $\overline{AB}$ y un punto F en $\overline{BC}$ tales que $\alpha=\angle ADE$, $\beta=\angle EDF$, $\angle DEF=90^o$ y $|DF|=1$.

Este rectángulo lo podemos construir de la siguiente manera: Dado el triángulo rectángulo ΔDEF con $\beta=\angle EDF$ y $|DF|=1$, trazamos una recta r exterior β con ángulo α, y una recta s perpendicular a r por D. Trazamos ahora la perpendicular a r por E, que se cortará con r en el punto A, y la perpendicular a s por F, que se cortará con s en C. El punto B será la intersección de dichas perpendiculares.



$$\sin\beta=\frac{|EF|}{|DF|}=|EF|,\ \cos\beta=\frac{|DE|}{|DF|}=|DE|$$

En el triángulo ΔEBF:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha+90+\angle AED=180\Rightarrow\angle AED=90-\alpha\\ \angle DEF=90\\ \angle AED+\angle DEF+\angle BEF=180\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$90-\alpha+90+\angle BEF=180\Rightarrow\angle BEF=\alpha$$

$$\sin\alpha=\frac{|BF|}{|EF|}\Rightarrow|BF|=\sin\beta\sin\alpha$$

$$\cos\alpha=\frac{|BE|}{|EF|}\Rightarrow|BE|=\sin\beta\cos\alpha$$

En el triángulo ΔDAE:

$$\sin\alpha = \frac{|AE|}{|DE|} \Rightarrow |DE|\sin\alpha = |AE| \Rightarrow \cos\beta\cdot\sin\alpha = |AE|$$

$$\cos\alpha = \frac{|AD|}{|DE|} \Rightarrow |DE|\cos\alpha = |AD| \Rightarrow \cos\beta\cdot\cos\alpha = |AD|$$

En el triángulo ΔCFD:

Puesto que $AB // CD$ tenemos que $\angle DFC = \alpha + \beta$.

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{|CD|}{|DF|} = |CD| = |AE| + |BE| = \cos\beta\cdot\sin\alpha + \sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{|CF|}{|DF|} = |CF| = |BC| - |BF| = |AD| - |BF| = \cos\beta\cdot\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha$$

Con lo que llegamos a las fórmulas de la suma de ángulos:

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\beta\cdot\sin\alpha + \sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\beta\cdot\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha$$

De las que deducimos la fórmula de la tangente de la suma:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\cos\beta\cdot\sin\alpha + \sin\beta\cos\alpha}{\cos\beta\cdot\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha} =$$

$$= \frac{(\cos\beta\cdot\sin\alpha + \sin\beta\cos\alpha)/(\cos\beta\cdot\cos\alpha)}{(\cos\beta\cdot\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha\ )/(\cos\beta\cdot\cos\alpha)} =$$

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \dfrac{\sin\beta\sin\alpha}{\cos\beta\cdot\cos\alpha}} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

8.1.12 Corolario. Fórmulas trigonométricas para el ángulo doble.

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\beta$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

Demostración. Basta aplicar las fórmulas de la suma de ángulos para $\beta = \alpha$.

Tabla 1. Razones trigonométricas de los ángulos más importantes

	0 $0°$	$\pi/12$ $15°$	$\pi/6$ $30°$	$\pi/4$ $45°$	$\pi/3$ $60°$
sin	0	$\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
cos	1	$\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$
tan	0	$2-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$
csc	∞	$\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$	2	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}/3$
sec	1	$\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$	$2\sqrt{3}/3$	$\sqrt{2}$	2
cot	∞	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$

	$5\pi/12$ $75°$	$\pi/2$ $90°$	$7\pi/12$ $105°$	$2\pi/3$ $120°$
sin	$\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$	1	$\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$	$\sqrt{3}/2$
cos	$\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$	0	$\frac{-\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$	$-1/2$
tan	$2+\sqrt{3}$	∞	$-(2+\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$
csc	$\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$	1	$\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$	$2\sqrt{3}/3$
sec	$\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$	∞	$-\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$	-2
cot	$2-\sqrt{3}$	0	$-(2-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}/3$

	$3\pi/4$ $135°$	$5\pi/6$ $150°$	$11\pi/12$ $165°$	π $180°$
sin	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	$\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$	0
cos	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	$\frac{-\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$	-1
tan	-1	$-\sqrt{3}/3$	$-(2-\sqrt{3})$	0
csc	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$	∞
sec	$-\sqrt{2}$	$-2\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$	-1
cot	-1	$-\sqrt{3}$	$-(2+\sqrt{3})$	∞

Fuente: Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables (Abramowitz, Stegun, 1972)

9 Circunferencias.

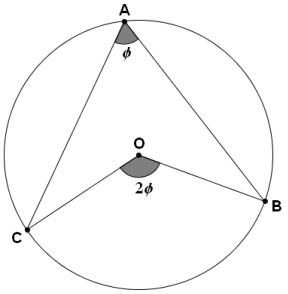
Una circunferencia puede no ser redonda.
Ninguno comprendíamos el secreto nocturno de las pizarras
ni por qué la esfera armilar se exaltaba tan sola cuando la mirábamos.
Sólo sabíamos que una circunferencia puede no ser redonda
y que un eclipse de luna equivoca a las flores
y adelanta el reloj de los pájaros.
Ninguno comprendíamos nada:
ni por qué nuestros dedos eran de tinta china
y la tarde cerraba compases para al alba abrir libros.
Sólo sabíamos que una recta, si quiere, puede ser curva o quebrada
y que las estrellas errantes son niños que ignoran las aritmética.

Rafael Alberti, Los ángeles colegiales, en Sobre los ángeles (1929)

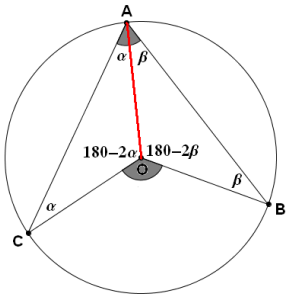
9.1 Ángulos inscritos y cuerdas.

9.1.1 Teorema. Teorema del ángulo inscrito. (Elementos III.20) (Inscribed Angle Theorem).

En un círculo, el ángulo correspondiente al centro es el doble del correspondiente a la circunferencia, cuando los ángulos tienen como base la misma circunferencia.

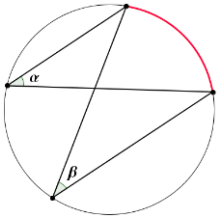


Demostración: Trazamos el radio AO

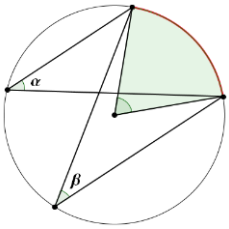


$$\angle COB = 360^{o} - (180^{o} - 2\alpha) - (180^{o} - 2\beta) = 360 - 180 + 2\alpha - 180 + 2\beta =$$
$$2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) = 2\phi$$

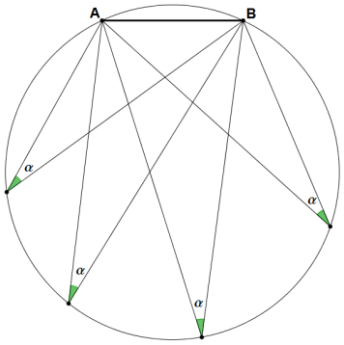
9.1.2 Corolario.
Dos ángulos inscritos en una circunferencia abarcando el mismo arco son congruentes: $\alpha \cong \beta$



Demostración. Ambos valen la mitad del ángulo central común:

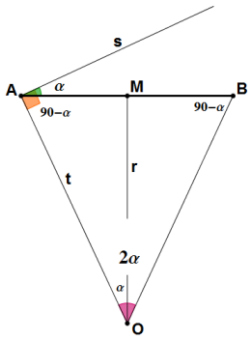


9.1.3 Proposición. El Arco Capaz.
Dado un segmento $\overline{AB}$ y un ángulo α, existirá un arco en el que todo punto P del mismo cumple $\angle APB = \alpha$. A dicho arco le llamaremos **arco capaz**.

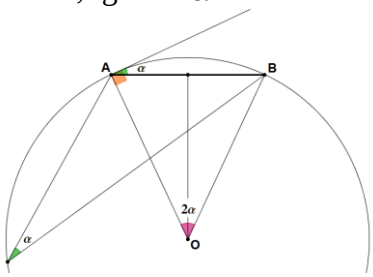


Un observador que se moviera por dicho arco siempre vería el segmento con el mismo ángulo α.

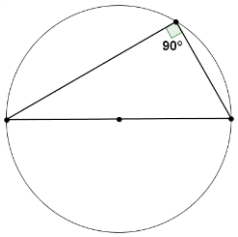
Para encontrar el arco capaz procederemos de la siguiente manera:
Trazamos la mediatriz r del segmento $\overline{AB}$.
Trazamos una semirrecta s con un ángulo α sobre el extremo A del segmento.
Trazamos la perpendicular t a s por A.
Sea O el punto de intersección entre r y t.
El arco capaz será la circunferencia de centro O y radio $\overline{OA} = \overline{OB}$.
En efecto, Sea M el punto medio de $\overline{AB}$.
Los triángulos ΔAMO y ΔBMO son congruentes, pues son dos triángulos rectángulos con catetos congruentes. Luego $90 - \alpha = \angle OAB = \angle OBA$, y $\overline{AO} \cong \overline{BO}$, es decir, el triángulo ΔABO es un triángulo isósceles con $\angle AOB = 180 - 2(90 - \alpha) = 2\alpha$



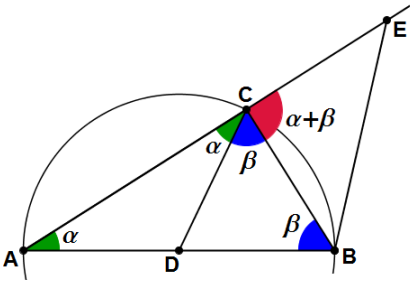
Por 9.1.1, los puntos de la circunferencia con centro O y radio $\overline{AO}$ abarcarán un ángulo igual a la mitad del central, es decir, igual a α.



9.1.4 Teorema. Teorema de Tales. (Parte de Elementos III-31)
Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto, y viceversa. Es decir, el arco capaz asociado al ángulo recto es la circunferencia cuyo diámetro es el propio segmento.



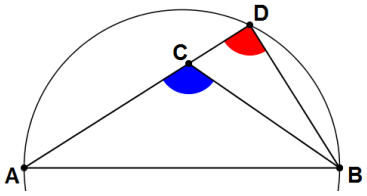
Demostración:
Sea un triángulo ΔABC cuyo lado $\overline{AB}$ es el diámetro de una circunferencia de centro D. Supongamos que el tercer vértice pertenece a dicha circunferencia. Trazamos el radio $\overline{DC}$. Puesto que $\overline{CD} \cong \overline{BD}$, el triángulo ΔBCD es isósceles en D y por tanto $\beta = \angle DBC \cong \angle DCB$ (2.8.3).
De la misma forma ΔADC es isósceles en D, luego $\alpha = \angle DAC \cong \angle ACD$.



Así pues, $\angle ACB = \alpha + \beta$.

Ahora bien, prolongando el lado $\overline{AC}$ hasta un punto E, sabemos que también $\angle ECB = \alpha + \beta$ (Es un ángulo exterior), luego $\angle ACB \cong \angle FCB$, y por tanto ambos ángulos son rectos.

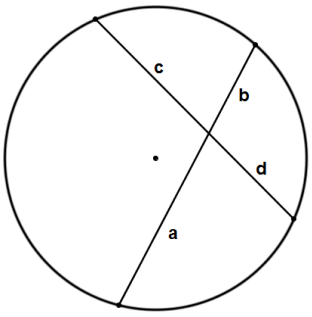
Recíprocamente, supongamos que tenemos un triángulo ΔABC rectángulo en C. Trazamos la circunferencia de diámetro $\overline{AB}$. Supongamos que C no está en esta circunferencia.
Prolongamos la recta $\overleftrightarrow{AC}$ hasta un punto D que sí pertenece a la circunferencia.



Por la primera parte de esta demostración, $\angle ADB$ será recto, pero $\angle ACB$ también es recto, ambas rectas serán perpendiculares comunes a una misma recta por un punto exterior, luego $C = D$ y por tanto C pertenecerá a la circunferencia.

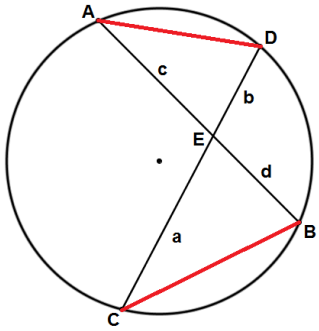
Nota histórica.
Tales vivió en Mileto, una isla griega en la costa de Asia Menor, entre 625 y 546 AC, aproximadamente. Tenemos certeza de este periodo porque, según Herotodo, predijo un eclipse solar que se ha podido datar, con las técnicas modernas, exactamente el 28 de mayo del 585 AC.
Tradicionalmente se ha señalado a Tales como el primer gran filósofo, matemático y científico griego. Se le considera precursor del rigor lógico en las demostraciones geométricas, y en general, del desarrollo práctico y teórico de la geometría.
Entre otras muchas anécdotas atribuidas a Tales, se cuenta que, en un viaje a Egipto, Tales fue capaz de medir la altura de una pirámide midiendo su sombra justo en el momento del día en que los objetos proyectaban una sombra igual a su altura.

9.1.5 Teorema. Teorema cuerda-cuerda. ("Intersecting Secants Theorem: Power of a Point")



$$a \cdot b = c \cdot d$$

Demostración: Marcamos los segmentos AD y BC.

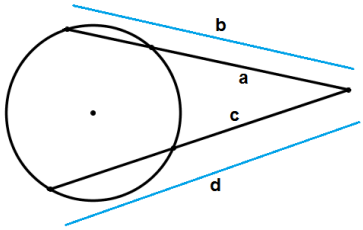


El ángulo en A es igual al ángulo en C, pues ambos ángulos interceptan el mismo arco (9.2.2), y de la misma manera el ángulo en D es igual al ángulo en B.

Así pues, los triángulos ADE y ECB son semejantes, pues tienen sus tres ángulos iguales (4.5.2), luego sus lados son proporcionales:

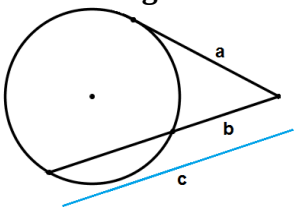
$$\frac{DE}{EA}=\frac{EB}{CE}\Rightarrow DE\cdot CE=EB\cdot EA\Rightarrow b\cdot a=d\cdot c\Rightarrow a\cdot b=c\cdot d$$

9.1.6 Teorema. Teorema secante-secante.



$$a\cdot b=c\cdot d$$

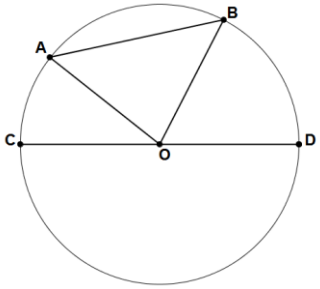
9.1.7 Teorema. Teorema secante-tangente.



$$a^2=b\cdot c$$

9.1.8 Proposición.
El diámetro es siempre mayor que cualquier otra cuerda.

Demostración.
Sea una circunferencia c con centro O, sea $\overline{CD}$ un diámetro y sea $\overline{AB}$ una cuerda que no sea diámetro, es decir, que no contenga el punto O.



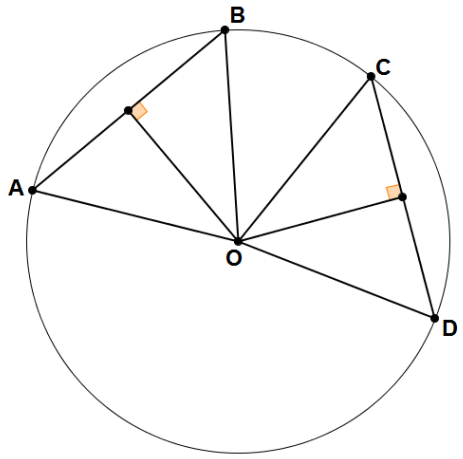
Entonces ΔAOB es un triángulo, y por tanto podemos aplicar la desigualdad triangular:
$|\overline{AB}| < |\overline{AO}| + |\overline{OB}|$

Pero $\overline{AO}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ y $\overline{OD}$ son radios, luego $|\overline{AO}| = |\overline{OB}| = |\overline{OC}| = |\overline{OD}|$, y por tanto

$$|\overline{AB}| < |\overline{AO}| + |\overline{OB}| = |\overline{CO}| + |\overline{OD}| = |\overline{CD}|$$

9.1.9 Proposición.
Cuerdas congruentes equidistan del centro. Recíprocamente, cuerdas que equidistan del centro son congruentes.

Demostración.
Sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ dos cuerdas congruentes de la misma circunferencia $c(O,r)$. Trazamos los radios para completar dos triángulos ΔAOB y ΔCOD, que serán congruentes por el criterio SSS.

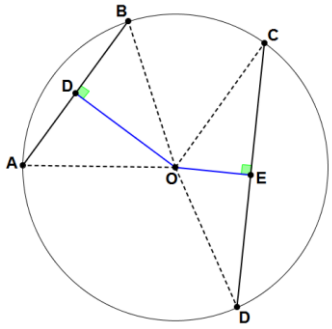


Son dos triángulos isósceles en el vértice O y congruentes, por lo tanto sus respectivas alturas por el vértice O serán segmentos congruentes (3.10.7), y en consecuencia la distancia de cada cuerda al centro será la misma.

9.1.10 Proposición.
Dadas dos cuerdas, la mayor dista menos del centro. Recíprocamente, la que dista menos del centro es mayor.

Demostración.
Sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ dos cuerdas en la misma circunferencia $c(O,r)$. Sean D y E las respectivas perpendiculares por el centro O. Queremos ver que

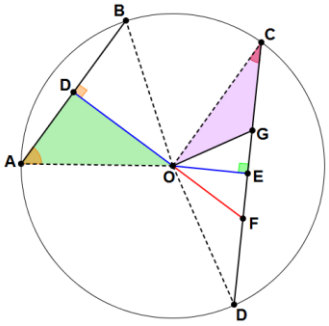
$$|\overline{AB}| < |\overline{CD}| \Leftrightarrow |\overline{DO}| > |\overline{OE}|$$



Supongamos que $|\overline{AB}| < |\overline{CD}|$. Existirá un punto F en el interior de $\overline{CD}$ tal que $\overline{AB} \cong \overline{CF}$.

En los triángulos ΔABO y ΔCFO tenemos $\overline{AB} \cong \overline{CF}$, $\overline{BO} \cong \overline{OC}$ y $\overline{OF} < \overline{OB}$ (pues F pertenece al interior de la circunferencia), luego $|\angle FCO| < |\angle BAO|$.

Sea G el punto medio de $\overline{CF}$. D es el punto medio de $\overline{AB}$ y E es el punto medio de $\overline{CF}$ (3.10.4).

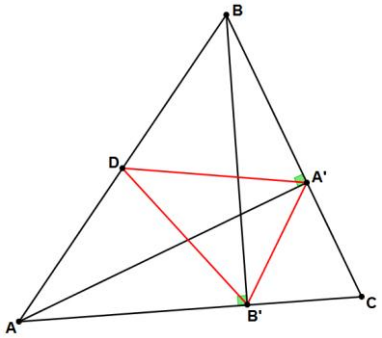


Consideremos los triángulos ΔADO y ΔCGO: $\overline{AO} \cong \overline{OC}$, $\overline{AD} \cong \overline{CG}$, $|\angle GCO| < |\angle DAO|$, luego $|\overline{OD}| > |\overline{OG}|$.

Por ser ΔOEG rectángulo en $\angle E$, $|\overline{OG}| > |\overline{OE}|$, y por transitividad, $|\overline{OD}| > |\overline{OG}| > |\overline{OE}|$, tal y como queríamos ver.

9.1.11 Ejercicio. Triángulo isósceles con alturas y punto medio.

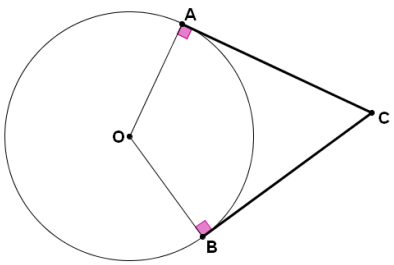
En un triángulo ΔABC, sea D el punto medio del segmento $\overline{AB}$ y sean $\overline{AA'}$ y $\overline{BB'}$ alturas. Demostrar que $\Delta DA'B'$ es isósceles.



Solución. [Pro2] Ejercicio 1.

9.1.12 Proposición. Dos segmentos tangentes concurrentes son congruentes.

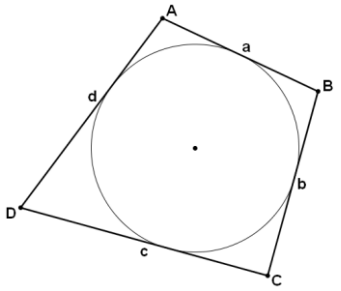
$$\overline{AC} \cong \overline{BC}$$



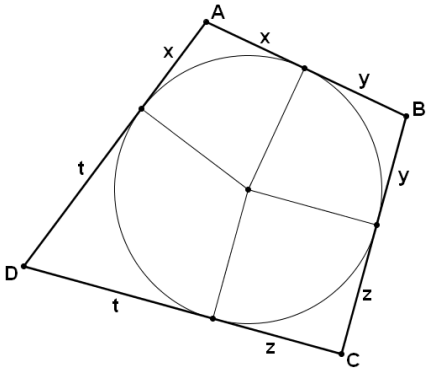
Demostración.
Trazando el segmento OC encontramos dos triángulos rectángulos que comparten un cateto: $OA \cong OB$ y la hipotenusa común $\overline{OC}$. Luego, por el criterio HL (3.8.7) serán congruentes, y por tanto $\overline{AC} \cong \overline{BC}$.

9.1.13 Teorema. Caracterización de los cuadriláteros con circunferencia inscrita.
Un cuadrilátero tiene una circunferencia inscrita si y sólo si coinciden las sumas de los lados opuestos:

$$a + c = b + d$$



Demostración.
Para demostrar su necesidad basta aplicar la proposición anterior a los ocho segmentos involucrados, que serán iguales dos a dos:



$$a + c = x + y + z + t = y + z + x + t = b + d$$

Veamos ahora su suficiencia:

9.2 Polígonos regulares.

9.2.1 Definición. Polígono regular.

Diremos que un polígono es regular cuando todos sus ángulos y todos sus lados sean congruentes.

9.2.2 Definición. Polígono inscrito en una circunferencia.

Diremos que un polígono está inscrito en una circunferencia cuando todos sus vértices estén sobre la circunferencia; de la circunferencia diremos que está circunscrita al polígono.

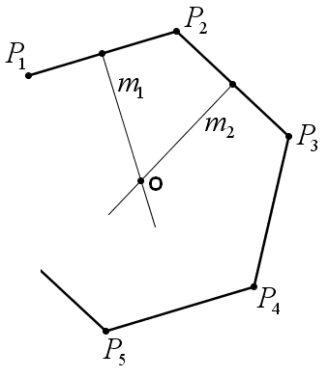
9.2.3 Teorema.

Todo polígono regular de n lados se puede descomponer en n triángulos isósceles con ángulo central $360/n$ y ángulo lateral $90\left(1-\frac{2}{n}\right)$. Los ángulos internos de un polígono regular miden $180\left(1-\frac{2}{n}\right)$. Todo polígono regular se puede inscribir en una circunferencia.

Demostración.

Sea un polígono regular $P_1 P_1 P_3 P_4 ... P_n$.

Trazamos las mediatrices m_1 de $\overline{P_1P_2}$ y m_2 de $\overline{P_2P_3}$. No pueden ser paralelas pues son perpendiculares a dos rectas no paralelas, luego se cortarán en un punto O.



Por la caracterización de mediatrices (3.9.10), $\overline{P_1O} \cong \overline{P_2O}$, y $\overline{P_2O} \cong \overline{P_3O}$, luego los triángulos ΔP_1OP_2 y ΔP_2OP_3 son isósceles en O, y son congruentes por el criterio SSS.

Por lo tanto $\angle P_2P_1O \cong \angle P_1P_2O \cong \angle P_3P_2O \cong \angle P_2P_3O$.

Llamemos α al ángulo de los vértices del polígono:

$$\alpha = \left|\angle P_1P_2P_3\right| = \left|\angle P_2P_3P_4\right| = ... = \left|\angle P_nP_1P_2\right|$$

Entonces

$$\left|\angle OP_3P_4\right| = \alpha - \left|\angle OP_3P_2\right| = \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} = \left|\angle OP_2P_3\right|$$

Puesto que se cumple además $\overline{P_3P_4} \cong \overline{P_2P_3}$ y $\overline{P_2O} \cong \overline{P_3O}$, por el criterio SAS deducimos que $\Delta P_3OP_4 \cong \Delta P_2OP_3$, y por tanto $\overline{OP_3} \cong \overline{OP_4}$.

Este procedimiento lo podemos repetir una y otra vez hasta llegar al último vértice P_n, es decir, el punto O es el centro de la circunferencia circunscrita al polígono.

9.2.4 Corolario. Propiedad fundamental del hexágono.
El lado de un hexágono regular es igual al radio del círculo circunscrito.

Demostración. Un hexágono regular se puede descomponer en 6 triángulos rectángulos con ángulo central $360/6 = 60^o$ y ángulos laterales $90\left(1-\frac{2}{6}\right) = 60^o$, luego son triángulos equiláteros (3.8.6), de lo que se deduce fácilmente el enunciado.

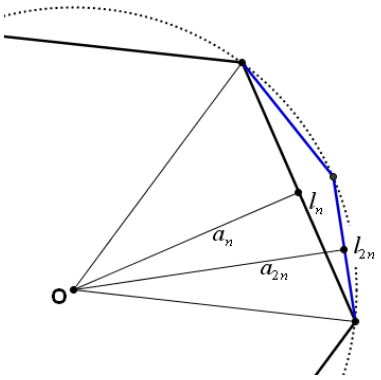
9.2.5 Definición. Apotema.
Se llama **apotema** de un polígono regular a la distancia del centro a los lados.
Esta definición está bien construida puesto que sabemos que todas las cuerdas congruentes son equidistantes al centro (9.1.8).

9.3 Área del círculo y longitud de la circunferencia. El número Pi.

9.3.1 Proposición. Sucesión de polígonos regulares inscritos en una circunferencia.
Sea un polígono regular de n lados $R_n = P_1 P_2 ... P_n$, inscrito en la circunferencia de centro O.
Denotaremos su lado por l_n, su perímetro por p_n y su apotema por a_n.
Claramente $p_n = n \cdot l_{2n}$
En el teorema (9.2.3) ya vimos que todo polígono regular se puede descomponer en n triángulos isósceles $\Delta P_i O P_{i+1}$, todos ellos congruentes entre sí, luego

$$\alpha(R_n) = n \cdot \alpha(\Delta P_1 O P_2) = \frac{n \cdot l_n \cdot a_n}{2} = \frac{p_n \cdot a_n}{2}$$

Si duplicamos el número de lados del polígono $R_n \to R_{2n}$, observamos las siguientes relaciones:



i) $l_n > l_{2n}$ (Proposición ????)
ii) $l_n > l_{2n} \Rightarrow a_n < a_{2n}$ (Proposición 9.1.9)
iii) $l_n < 2l_{2n}$ (por la desigualdad triangular), y por tanto

$$p_n = n \cdot l_n < 2n \cdot l_{2n} = p_{2n}$$

iv) $\alpha(R_n) = \frac{p_n \cdot a_n}{2} < \frac{p_{2n} \cdot a_n}{2} < \frac{p_{2n} \cdot a_{2n}}{2} = \alpha(R_{2n})$ (aplicando ii) y iii)).

Si realizamos este proceso una y otra vez, obtenemos una sucesión de polígonos regulares inscritos en la circunferencia

$$R_n \to R_{2n} \to R_{4n} \to R_{8n} \to ...$$

Con sucesiones de lados, apotemas, perímetros y áreas asociados cumpliendo

$$l_n > l_{2n} > l_{4n} > l_{8n} > ...$$
$$a_n < a_{2n} < a_{4n} < a_{8n} < ...$$
$$p_n < p_{2n} < p_{4n} < p_{8n} < ...$$
$$\alpha(R_n) < \alpha(R_{2n}) < \alpha(R_{4n}) < \alpha(R_{8n}) < ...$$

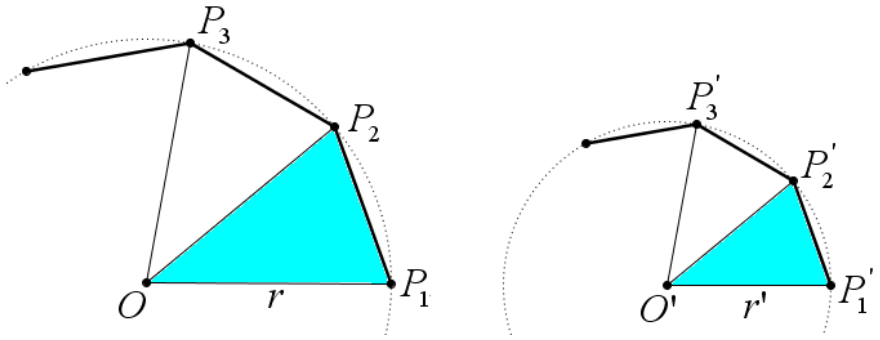
Las sucesiones de apotemas, perímetros y áreas son estrictamente crecientes. La sucesión de apotemas está acotada superiormente por el radio de la circunferencia, la

sucesión de perímetros está acotada por el perímetro de cualquier polígono que contenga la circunferencia, y la sucesión de áreas está acotada por el área de cualquier polígono que contenga la circunferencia.
Ahora podemos aplicar uno de los teoremas más importantes del análisis real: Toda sucesión de números reales creciente y acotada superiormente tiende a su supremo.

Definiremos la **longitud de la circunferencia** por $L = \lim_{k\to\infty} p_k$, y definiremos el **área de la circunferencia** por $A = \lim_{k\to\infty} \alpha(R_k)$.

9.3.2 Proposición. El número Pi.
La razón entre la longitud de la circunferencia L y su diámetro es constante, es decir, es independiente de la circunferencia que tomemos. A dicha constante la denotaremos por la letra griega π.

Demostración.
Supongamos que tenemos dos circunferencias de radios diferentes $c(O,r)$ y $c'(O',r')$.
Sea $R_n = P_1P_2...P_n$ el polígono regular de n lados inscrito en c, y sea $R_n' = P_1'P_2'...P_n'$ el polígono regular de n lados inscrito en c'.



Puesto que ambos polígonos son semejantes, $\Delta OP_1P_2 \cong \Delta O'P_1'P_2'$.
Luego sus lados son proporcionales, en particular
$\frac{\overline{P_1P_2}}{\overline{OP_1}} = \frac{\overline{P_1'P_2'}}{\overline{OP_1'}}$ o equivalentemente, $\frac{l_n}{r} = \frac{l_n'}{r'} \Leftrightarrow \frac{nl_n}{2r} = \frac{nl_n'}{2r'} \Leftrightarrow \frac{p_n}{2r} = \frac{p_n'}{2r'}$

Tendiendo al límite,
$\frac{L}{2r} = \lim_{k\to\infty} \frac{p_n}{2r} = \lim_{k\to\infty} \frac{p_n'}{2r'} = \frac{L'}{2r'}$. La igualdad $\frac{L}{2r} = \frac{L'}{2r'}$ garantiza que dicha razón es la misma independientemente de la circunferencia que tomemos.

9.4 Inversiones.

9.4.1 Definición. Inversión.

Sea C una circunferencia de centro O y radio r. Dado cualquier punto $P \neq O$ del plano, su inverso $P' = i(P)$ es el punto de la semirrecta $\overrightarrow{OP}$ que verifica

$$\left|\overline{OP}\right| \cdot \left|\overline{OP'}\right| = r^2$$

Observaciones:

1. Puesto que en la semirrecta $\overrightarrow{OP}$ siempre existirá un único punto P' tal que

$$\left|\overline{OP'}\right| = \frac{r^2}{\left|\overline{OP}\right|}$$

el punto inverso está bien definido.

2. La función es una biyección en $IP - \{O\}$.

3. La función es idempotente ($i^2 = Id$) en $IP - \{O\}$.

3. Si $P \in C$, entonces $\left|\overline{OP}\right| = r$ y $\left|\overline{OP'}\right| = \frac{r^2}{r} = r$ y por tanto $P = P'$, es decir, la función deja invariantes los puntos de la circunferencia.

4.Si P está en el interior de la circunferencia $\left|\overline{OP}\right| < r$ y entonces $\left|\overline{OP'}\right| = \frac{r^2}{\left|\overline{OP}\right|} > \frac{r^2}{r} = r$ y por tanto P' está fuera de la misma, y viceversa. Es decir, las inversiones intercambian el interior y el exterior de las circunferencias.

9.4.2 Proposición.

Las inversiones transforman rectas que pasan por el centro O en rectas que pasan por el centro O.

Demostración.

$P \in \overleftrightarrow{OQ}, P \neq Q \Rightarrow \overleftrightarrow{OQ} = \overleftrightarrow{OP} \Rightarrow i(P) = P' \in \overleftrightarrow{OP} \subset \overleftrightarrow{OP} = \overleftrightarrow{OQ} \Rightarrow P' \in \overleftrightarrow{OQ}$

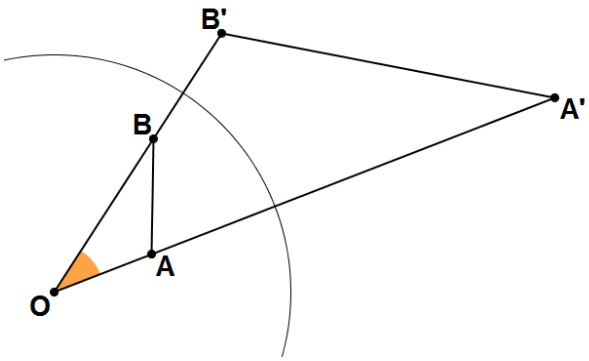
Por definición de punto inverso, $P' \in \overrightarrow{OP}$.

9.4.3 Lema.

Sea una circunferencia C con centro O, y sea ΔAOB un triángulo con un vértice en O. Entonces

$$\Delta AOB \approx \Delta B'OA'$$

Donde A' y B' son los respectivos inversos de A y B.



Demostración.

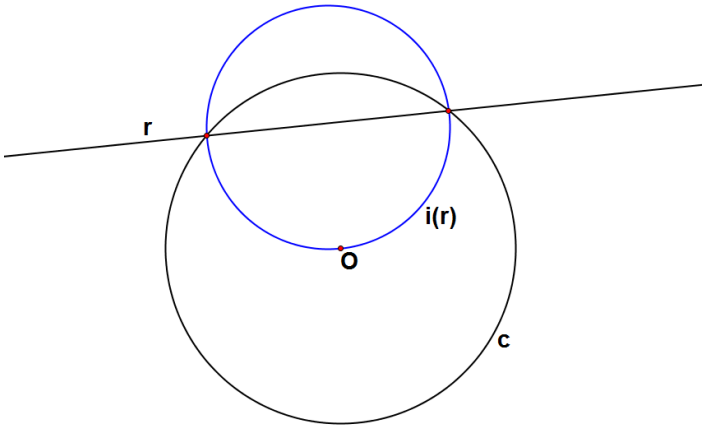
Puesto que $A' \in \overrightarrow{OA}$ y $B' \in \overrightarrow{OB}$, $\angle AOB = \angle A'OB'$.

Sabemos que $\left|\overline{OA'}\right| = \frac{r^2}{\left|\overline{OA}\right|}$ y $\left|\overline{OB'}\right| = \frac{r^2}{\left|\overline{OB}\right|}$

Tomando $k = \frac{\left|\overline{OA}\right| \cdot \left|\overline{OB}\right|}{r^2}$, se cumple $\left|\overline{OA'}\right| k = \left|\overline{OB}\right|$ y $\left|\overline{OB'}\right| k = \left|\overline{OA}\right|$, luego $\Delta AOB \approx \Delta B'OA'$ por el criterio SAS de triángulos.

9.4.4 Proposición. Las inversiones transforman rectas que no pasan por O en circunferencias.

Sea c una circunferencia con centro O y sea r una recta que no pasa por O. La imagen de r por la inversión i será una circunferencia que pasa por O excepto el propio punto O.

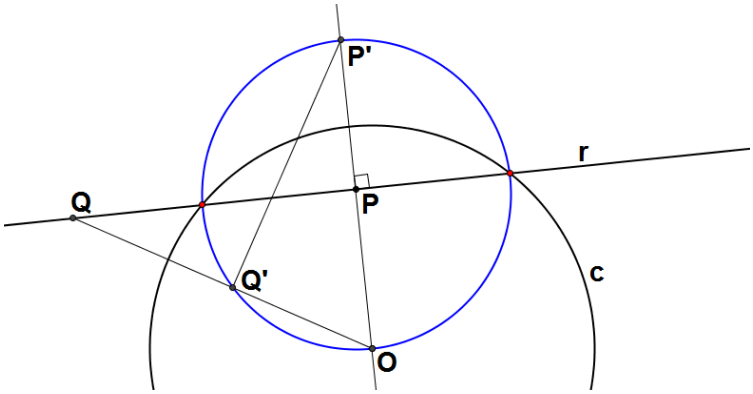


Demostración.

Sea P el punto de intersección entre la recta r la recta perpendicular a r que pasa por O. Sea P'= i(P). Queremos demostrar que la imagen de Q está contenida en la circunferencia de centro P y diámetro OP'.

Sea Q un punto cualquiera de la recta r y Q'= i(Q).

Por el lema anterior, $\Delta QOP \approx \Delta P'OQ'$, luego $\angle P \cong \angle Q'$, más exactamente, $\angle QPO \cong \angle P'Q'O$. Pero $\angle QPO$ es recto por construcción, luego $\angle P'Q'O$ también lo será, y por el teorema de Tales, el punto Q' pertenecerá a la circunferencia de centro P y diámetro OP'.



9.4.5 Corolario. Las inversiones transforman circunferencias que pasan por O en rectas.

Puesto que toda inversión es idempotente, es decir, $i^2 = Id$, transformará circunferencias que pasan por el centro O en rectas que no pasan por O.

9.4.6 Teorema. Las inversiones transforman circunferencias que no pasan por O en circunferencias.

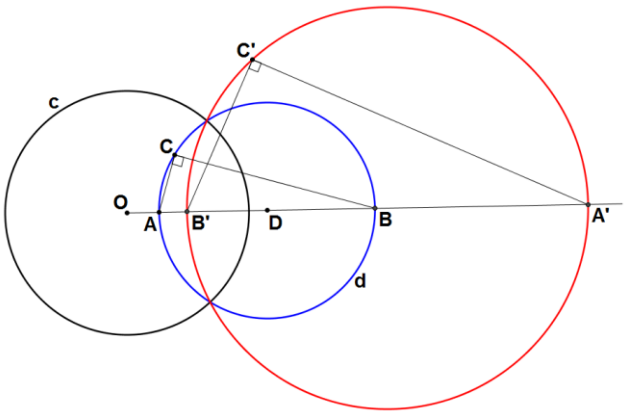
Demostración.

Sea c una circunferencia con centro O. Sea d una segunda circunferencia con centro D. Supongamos que O no está en d. Trazamos la semirrecta $\overrightarrow{OD}$ que cortará d en dos puntos A y B. Sean A' y B' los puntos inversos de A y B respectivamente.

Sea C otro punto cualquiera de d.

$\angle ACB$ es recto, por estar inscrito en la circunferencia d. Luego

$180 = \angle ACB + \angle CAB + \angle ABC = 90 + \angle CAB + \angle ABC \Rightarrow \angle CAB + \angle ABC = 90$



Aplicando dos veces el lema anterior:

$\Delta C'OA' \approx \angle AOC \Rightarrow \angle OC'A' \cong \angle OAC = 180 - \angle CAB$

$\Delta B'OC' \approx \Delta COB \Rightarrow \angle OB'C' \cong \angle OBC = \angle ABC$

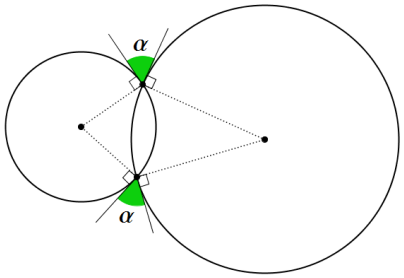
Y por tanto:

$\angle B'C'A' = \angle OC'A' - \angle OC'B' = 180 - \angle CAB - \angle OCB = 180 - (\angle CAB + \angle ABC) =$

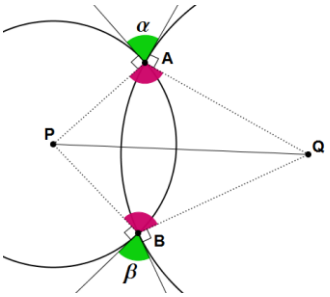
$180 - 90 = 90$

Es decir, $\angle B'C'A'$ también es recto, y en consecuencia pertenece a la circunferencia de diámetro A'B'.

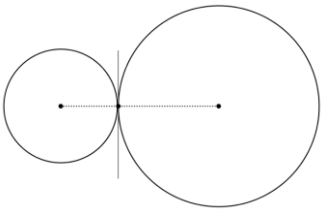
9.4.7 Definición. Ángulo entre dos circunferencias.
Definimos el ángulo entre dos circunferencias que se cortan en dos puntos como el ángulo que determinan las rectas tangentes a dichas circunferencias en los puntos de corte.



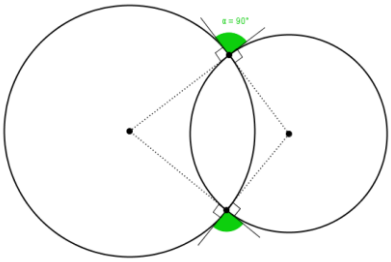
Los dos ángulos determinados son iguales. Efectivamente, llamando P y Q a los centros de las dos circunferencias, y A y B lo dos puntos de corte de las mismas, $\Delta PQA \approx \Delta PQB$ por el criterio SSS, y por tanto $\angle PAQ \cong \angle PBQ$.
Por otro lado, tenemos $90+90+\alpha+\angle PAQ=360$ y $90+90+\beta+\angle PBQ=360$, de lo que se deduce $\alpha=\beta$



Si las dos circunferencias son tangentes, es decir, se cortan en un único punto, diremos que el ángulo que determinan es 0:

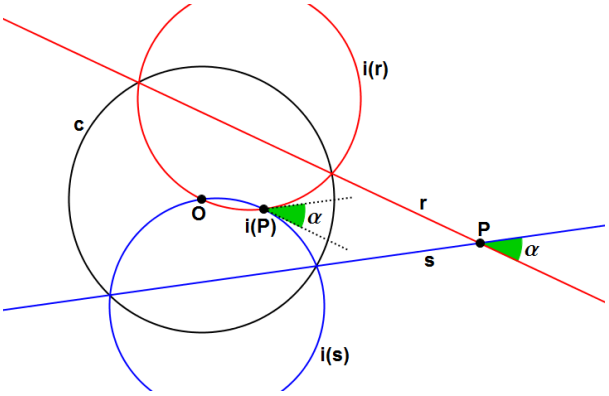


9.4.8 Definición. Circunferencias ortogonales.
Diremos que dos circunferencias son ortogonales cuando determinen un ángulo recto.



9.4.9 Teorema.
Las inversiones son transformaciones conformales, es decir, mantienen invariable los ángulos.

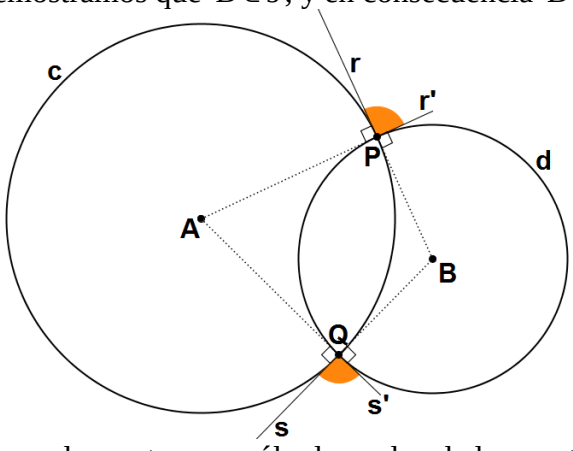
Demostración.



9.4.10 Corolario.
Si una circunferencia c es ortogonal a la circunferencia de la inversión, entonces queda invariante:

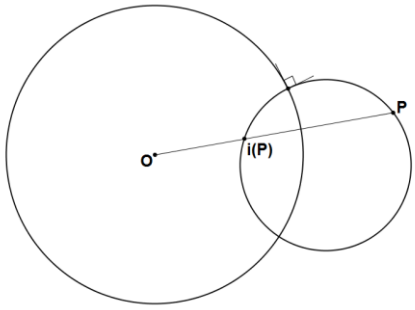
$$i(c) = c$$

Demostración.
Sea i la inversión asociada a la circunferencia c de centro A.
Sea d una circunferencia, y llamemos P y Q a sus puntos de intersección con c.
Sabemos que $i(P) = P$ y $i(Q) = Q$ pues son puntos de c.
Sean r y s las respectivas rectas tangentes a c por P y Q.
Sean r' y s' las respectivas rectas tangentes a d por P y Q.
El radio PB es perpendicular a r' y pasa por P, la recta r es perpendicular a r' y pasa por P, luego el radio PB está en la recta r, y por tanto $B \in r$.
De la misma forma demostramos que $B \in s$, y en consecuencia $B = r \cap s$.



B queda determinado por dos rectas que sólo dependen de los puntos P y Q, que son invariantes por la inversión, y el ángulo entre las dos circunferencias, que también es invariante por la inversión, luego el centro B será invariante por la inversión: $i(B) = B$.
Y finalmente, el radio también quedará invariante, pues $\left|\overline{i(B)i(P)}\right| = \left|\overline{BP}\right|$, por lo tanto toda la circunferencia quedará invariante.

Observación.
La circunferencia es fija: $i(c) = c$, pero no es de puntos fijos: $i(P) \neq P \ \forall P \in d$



9.4.11 Teorema. Fórmula de la inversión asociada a la circunferencia unidad.
La función compleja

$$f : C - \{0\} \to C$$

$$z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$$

es la inversión asociada a la circunferencia unidad $\{z \in C \mid |z| = 1\}$.

Demostración.
Trabajando en forma polar este resultado es inmediato:
Si $z = re^{\sigma i}$, entonces su imagen por la inversión tendrá el mismo argumento, y
La igualdad $|\overline{OP}| \cdot |\overline{OP'}| = 1^2$ equivale a $|\overline{OP'}| = \frac{1}{|\overline{OP}|} = \frac{1}{r}$.

Así pues,

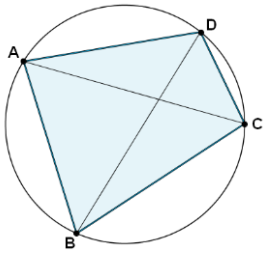
$$i(z) = \frac{1}{r} e^{\sigma i} = \frac{1}{re^{-\sigma i}} = \frac{1}{\bar{z}}$$

Tal y como queríamos ver.

9.5 Cuadriláteros cíclicos.

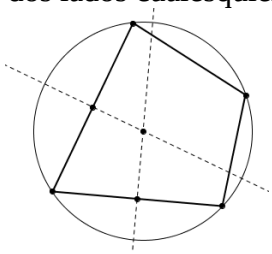
9.5.1 Definición. Cuadrilátero cíclico.

Un cuadrilátero cíclico es aquel que se puede inscribir en una circunferencia.



9.5.2 Proposición. Determinación de la circunferencia circunscrita a un cuadrilátero.

Si un cuadrilátero es cíclico su circunferencia circunscrita será la circunferencia circunscrita al triángulo formado por tres de sus vértices, luego el centro será la intersección de las mediatrices de dos lados cualesquiera del cuadrilátero.

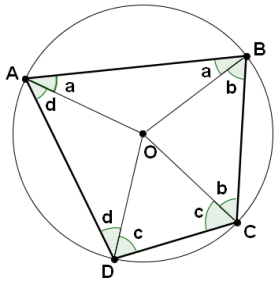


9.5.3 Proposición. Primera propiedad fundamental de los cuadriláteros cíclicos.

En un cuadrilátero cíclico, sus ángulos opuestos son suplementarios, es decir, suman 180º:

$$\angle BAD + \angle BCD = 180^{\circ}$$
$$\angle ABC + \angle ACDC = 180^{\circ}$$

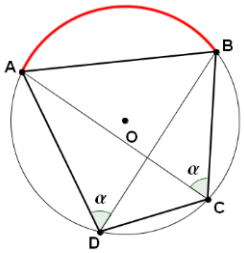
Demostración: Todo cuadrilátero cíclico ABCD se puede descomponer en cuatro triángulos isósceles, pues todos ellos tienen dos lados iguales al radio de la circunferencia.



La suma de los ángulos de un cuadrilátero es 360º, luego:

$$a + a + b + b + c + c + d + d = 360^{\circ} \Rightarrow 2a + 2b + 2c + 2d = 360^{\circ} \Rightarrow$$
$$2(a + b + c + d) = 360^{\circ} \Rightarrow a + b + c + d = 180^{\circ} \Rightarrow a + d + c + b = 180^{\circ} \Rightarrow$$
$$\angle A + \angle C = 180^{\circ}$$

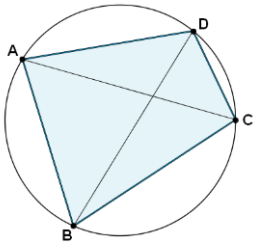
9.5.4 Proposición. Segunda propiedad fundamental de los cuadriláteros cíclicos.
En un cuadrilátero cíclico, el ángulo entre un lado y su diagonal es igual al ángulo entre el lado contrario y la otra diagonal:



$$\angle ADB = \angle ACB$$

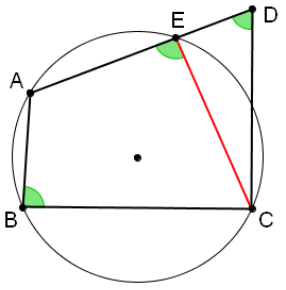
Demostración: Son iguales porque ambos son ángulos inscritos determinando el mismo arco de circunferencia (9.1.2).

9.5.5 Teorema. Primera caracterización de los cuadriláteros cíclicos.
Un cuadrilátero es cíclico si y sólo si es convexo y sus dos pares de ángulos opuestos son suplementarios:



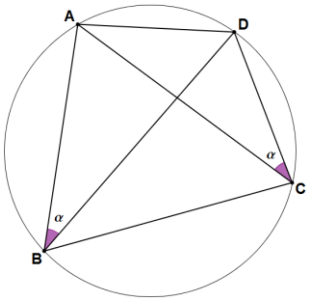
$$\angle BAD + \angle BCD = 180^o$$
$$\angle ABC + \angle ACDC = 180^o$$

Demostración. Ya hemos visto en 9.5.3 que si un cuadrilátero es cíclico sus ángulos opuestos son suplementarios. Demostraremos el recíproco por reducción al absurdo. Supongamos que tenemos un cuadrilátero $\Diamond ABCD$ en el que dos de sus ángulos opuestos son suplementarios: $\angle B + \angle D = 180^o$. Trazamos la circunferencia que pasa por los puntos A, B y C. Supongamos que el cuadrilátero no es cíclico, es decir, que esta circunferencia no pasa por D. Sea E el punto de intersección de la circunferencia con la recta $\overleftrightarrow{AD}$.



Entonces el cuadrilátero $\Diamond ABCE$ será cíclico, luego por 9.5.3 se cumplirá $\angle B + \angle E = 180^o$, por lo que $\angle E = \angle D$. Luego $\overleftrightarrow{EC} // \overleftrightarrow{DC}$, y como tienen un punto en común C, $\overleftrightarrow{EC} = \overleftrightarrow{DC}$, de lo que deducimos que E=D, es decir, el cuadrilátero es cíclico, llegando a contradicción.

9.5.6 Teorema. Segunda caracterización de los cuadriláteros cíclicos.
Un cuadrilátero es cíclico si y sólo si el ángulo entre un lado y su diagonal es igual al ángulo entre el lado contrario y la otra diagonal:



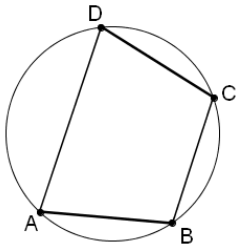
$\angle ABD = \angle ACD$

Demostración.
Ya hemos visto en 9.5.4 que esta condición es necesaria. Veamos ahora que es suficiente. Sea P el punto de corte de las dos diagonales.
Claramente los triángulos ΔABD y ΔCPD son semejantes pues comparten dos ángulos iguales (criterio AA). Y por tanto, sus lados son proporcionales:

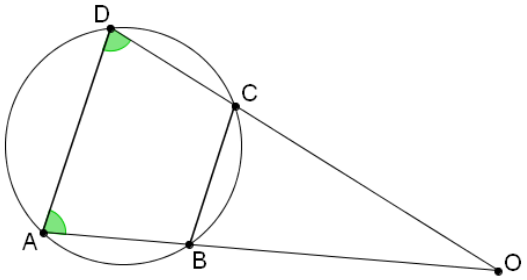
$$\frac{BP}{PA} = \frac{PC}{PD}$$

Luego los triángulos ΔAPD y ΔBPC también son semejantes, pues tienen un ángulo en común (el opuesto por el vértice) y dos lados contiguos proporcionales (Criterio SAS de semejanza 7.2.6).

9.5.7 Ejercicio.
Si un trapecio cíclico no es un rectángulo, sus lados no paralelos tienen la misma longitud.



Demostración.
Sea $\Diamond ABCD$ un cuadrilátero cíclico tal que $AD // BC$.
Si $AB // CD$ entonces es un paralelogramo, luego por 6.7.2c sus ángulos opuestos son congruentes, y puesto que son suplementarios porque el cuadrilátero es cíclico, serán rectos. Luego es un rectángulo, contradiciendo la hipótesis. Por lo tanto AB y CD no son paralelos. Sea O su punto de corte.

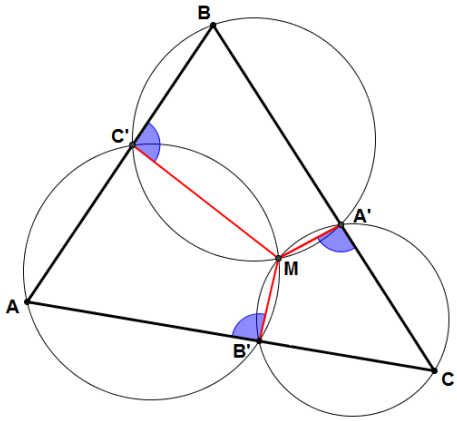


Puesto que $AD // BC$, tenemos que $\angle A$ y $\angle B$ son suplementarios. Pero por ser un cuadrilátero cíclico, $\angle B$ y $\angle D$ son suplementarios, luego por 2.3.1, $\angle A \cong \angle D$.
Luego el triángulo ΔAOD es isósceles en O, y por tanto $\overline{AO} \cong \overline{DO}$.
Por estar los triángulos ΔAOD y ΔBOC en posición de Tales, $\frac{AB}{CD} = \frac{AO}{DO} = 1$, y por tanto $AB = CD$.

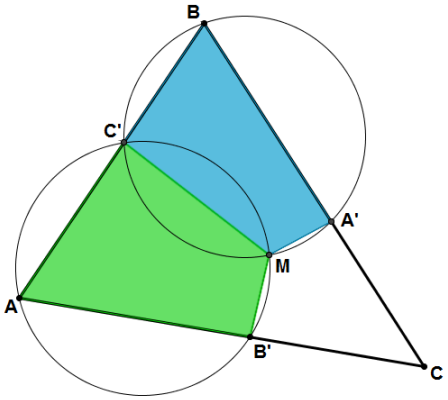
9.5.8 Teorema. Teorema de Miquel.
Sea un triángulo ABC y tres puntos arbitrarios en cada lado: $A' \in BC$, $B' \in AC$ y $C' \in AC$.

a) Las tres circunferencias circunscritas a los triángulos $BC'A'$, $AC'B'$ y $CB'A'$ se encuentran en un punto común M.

b) Los ángulos que determinan este punto M con los lados son iguales, como se indica en la siguiente figura:



Demostración: Las circunferencias circunscritas a los triángulos BC'A' y AB'C' cortan en C' y en un segundo punto M.
Los cuadriláteros BA'MC' y AC'MB' son cíclicos, luego tienen ángulos opuestos suplementarios: $\angle C'MA' = 180 - B$ y $\angle C'MB' = 180 - A$



La suma de los tres ángulos alrededor de M es un ángulo completo:

$\angle C'MA' + \angle C'MB' + \angle A'MB' = 360$ por lo que

$180 - B + 180 - A + \angle A'MB' = 360 \Rightarrow \angle A'MB' - A - B = 0 \Rightarrow$

$\angle A'MB' - (A + B) = 0 \Rightarrow \angle A'MB' - (180 - C) = 0 \Rightarrow \angle A'MB' - 180 + C = 0 \Rightarrow$

$\angle A'MB' + C = 180$

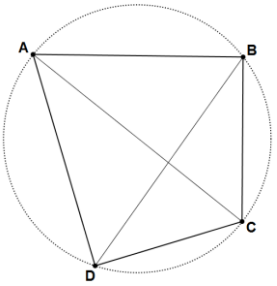
Por lo tanto el cuadrilátero A'CB'M también es cíclico. Puesto que una circunferencia queda determinada por tres puntos, su circunferencia circunscrita será la circunferencia circunscrita al triángulo A'B'C, de lo que se deduce que M pertenece a esta última, tal y como queríamos ver.

La propiedad de los ángulos se deduce fácilmente aplicando encadenadamente la propiedad fundamental de los cuadriláteros cíclicos (el ángulo exterior por un vértice es igual al ángulo interior por el vértice opuesto). Luego:

$$\angle MA'C = \angle BC'M = \angle AB'M$$

9.5.9 Teorema. Teorema de Ptolomeo.
En un cuadrilátero cíclico $\Diamond ABCD$ se cumple

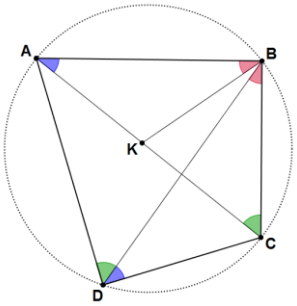
$$|AC|\cdot|BD| = |AB|\cdot|CD| + |BC|\cdot|AD|$$



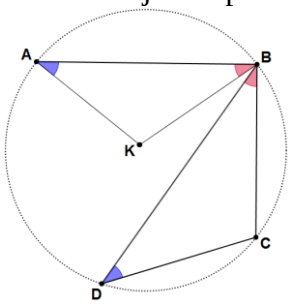
Esta relación se puede expresar verbalmente de la siguiente manera: En un cuadrilátero inscrito en una circunferencia, la suma de los productos de sus dos pares de lados opuestos es igual al producto de sus diagonales.

Observaciones.
El recíproco de este teorema también es cierto: Si un cuadrilátero cumple esta igualdad es porque es cíclico.
Este teorema es una generalización del teorema de Pitágoras, que queda como un caso particular cuando el cuadrilátero es un rectángulo.

Demostración.
Sabemos que $\angle BAC = \angle BDC$ y $\angle ADB = \angle ACB$ (9.5.4)
Sea K un punto del segmento $\overline{AC}$ tal que $\angle ABK = \angle DBC$.



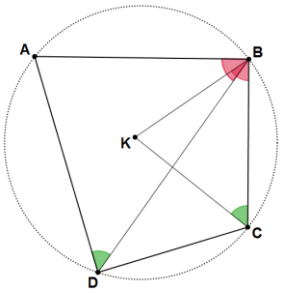
Los triángulos ΔABK y ΔDBC serán semejantes por el criterio AA (7.2.2):



Luego $\dfrac{|AK|}{|AB|} = \dfrac{|CD|}{|BD|} \Rightarrow |AK|\cdot|BD| = |CD|\cdot|AB|$ (1)

Los triángulos ΔKBC y ΔDBA son semejantes, por el criterio AA y teniendo en cuenta que

$$\angle ABK + \angle KBC = \angle ABC = \angle CBD + \angle DBA = \angle ABK + \angle DBA \Rightarrow$$
$$\angle ABK + \angle KBC = \angle ABK + \angle DBA \Rightarrow \angle KBC = \angle DBA$$



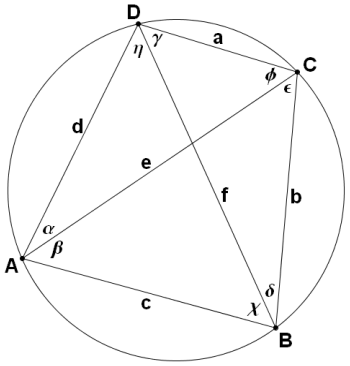
Luego $\dfrac{|KC|}{|BC|} = \dfrac{|AD|}{|BD|} \Rightarrow |KC| \cdot |BD| = |AD| \cdot |BC|$ (2)

Sumando (1)+(2):

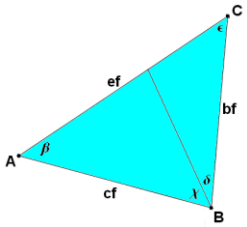
$$|AK| \cdot |BD| + |KC| \cdot |BD| = |CD| \cdot |AB| + |AD| \cdot |BC| \Rightarrow$$
$$\left(|AK| + |KC|\right) \cdot |BD| = |CD| \cdot |AB| + |AD| \cdot |BC| \Rightarrow$$
$$|AC| \cdot |BD| = |CD| \cdot |AB| + |AD| \cdot |BC|$$

Q.E.D.

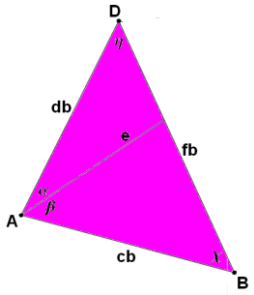
Una demostración alternativa muy interesante es la siguiente.
Partimos del cuadrilátero cíclico $\Diamond ABCD$ en el que marcamos sus lados, diagonales y ángulos de la siguiente manera:



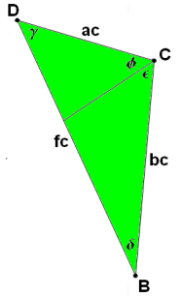
Consideramos el triángulo ΔACB y multiplicamos sus lados por f, obteniendo así un triángulo similar de lados bf, cf y ef.



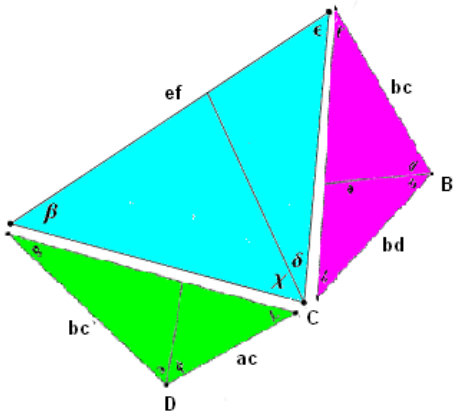
Consideramos el triángulo ΔABD y multiplicamos sus lados por b, obteniendo un triángulo similar de lados db, cb y fb.



Consideramos el triángulo ΔBCD y multiplicamos sus lados por c, obteniendo así un triángulo similar de lados ac, bc y fc.



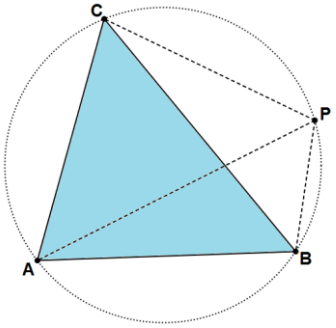
ΔACB tiene el lado bf en común con ΔABD y tiene el lado cf en común con ΔBCD



Y uniéndolos forman un cuadrilátero. En efecto, D, C y B están alineados puesto que $\gamma+\chi+\delta+\eta=(\gamma+\delta)+(\chi+\eta)=180^o$
ya que los ángulos opuestos de un cuadrilátero cíclico son suplementarios (9.5.3).
Los lados opuestos son conguentes, pues ambos son bc, y son paralelos, pues $(\beta+\delta)+(\varepsilon+\chi)=(\beta+\alpha)+(\varepsilon+\phi)=180^o$ nuevamente por 9.5.3.
Aquí hemos utilizado que $\delta=\alpha$ y $\chi=\phi$ por abarcar los mismos arcos.
Luego $\beta+\delta$ y $\varepsilon+\chi$ son suplementarios, y por tanto los lados opuestos bc son paralelos. Se trata de un paralelogramo, pues tiene dos lados opuestos iguales y paralelos (6.1.3), luego los otros dos lados opuestos son congruentes, es decir, $ef=ac+bd$, tal y como queríamos ver.

Fuente : web “dmat csc”

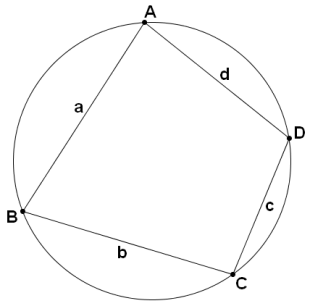
9.5.10 Corolario.
Sea ΔABC un triángulo inscrito en una circunferencia, y P cualquier punto de la misma. Entonces la distancia del punto P al vértice más lejano del triángulo es igual a la suma de distancias del punto P a los otros dos vértices.
$|PA| = |PB| + |PC|$



Demostración.
Basta reinterpretar la figura como la de un cuadrilátero cíclico $\Diamond ABPC$ y aplicar el teorema anterior:
$|CB| \cdot |AP| = |CP| \cdot |AB| + |AC| \cdot |BP| \Rightarrow$
$$|AP| = \frac{|CP| \cdot |AB| + |AC| \cdot |BP|}{|CB|} = \frac{|CP| \cdot |AB|}{|CB|} + \frac{|AC| \cdot |BP|}{|CB|} =$$
$$= |CP| \frac{|AB|}{|CB|} + |BP| \frac{|AC|}{|CB|} =$$
???? acabar.

Nota histórica.
Ptolomeo (Claudius Ptolemaeus) nació en Egipto en el año 90 DC y falleció en el 168. Fue un matemático, astrónomo, músico, químico y geógrafo griego.

9.5.11 Teorema. La fórmula de Brahmagupta.
Sea un cuadrilátero cíclico convexo $\Diamond ABCD$. Definimos $a = |\overline{AB}|$, $b = |\overline{BC}|$, $c = |\overline{CD}|$, $d = |\overline{DA}|$ y $s = (a+b+c+d)/2$.
Entonces
$$[\Diamond ABCD] = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$



Demostración.

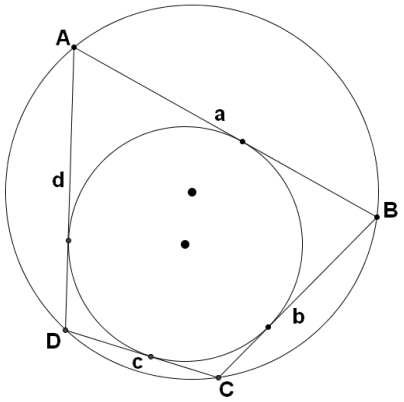
Trazamos la diagonal $\overline{AC}$. Sea $\angle B = \angle ABC$ y $\angle D = \angle ADC$.
Aplicamos el Teorema del Coseno a los triángulos ΔABC y ΔACD:
$a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle B = AC^2 = d^2 + c^2 - 2cd\cos\angle D$
Puesto que es un cuadrilátero cíclico, sus ángulos opuestos serán suplementarios:
$\angle B + \angle D = 180^o$, luego $\cos\angle B = -\cos\angle D$, y por tanto
$a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle B = AC^2 = d^2 + c^2 + 2cd\cos\angle B \Leftrightarrow$
$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2\cos\angle B(ab + cd) \Leftrightarrow$
$$\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)} = \cos\angle B$$
Luego

$$\sin^2\angle B = 1 - \cos^2\angle B = (1 - \cos\angle B)(1 + \cos\angle B)$$
$$= \left(1 - \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}\right)\left(1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}\right)$$
$$= \frac{2(ab + cd) - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)}{2(ab + cd)} \cdot \frac{2(ab + cd) + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)}{2(ab + cd)}$$
$$= \frac{\left(2(ab + cd) - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)\right)\left(2(ab + cd) + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)\right)}{4(ab + cd)^2}$$
$$= \frac{\left(2ab + 2cd - a^2 - b^{2\grave{}} + c^2 + d^2\right)\left(2ab + 2cd + a^2 + b^2 - c^2 - d^2\right)}{4(ab + cd)^2} =$$
$$= \frac{\left((c + d)^2 - (a - b)^2\right)\left((a + b)^2 - (c - d)^2\right)}{4(ab + cd)^2} = (1)$$

Por otro lado
$(a + b)^2 - (c - d)^2 = (a + b + c - d)(a + b + d - c) = 4(s - d)(s - c)$
$(c + d)^2 - (a - b)^2 = 4(s - a)(s - b)$
Luego
$$(1) = \frac{4(s - a)(s - b)4(s - d)(s - c)}{4(ab + cd)^2} = \frac{4(s - a)(s - b)(s - d)(s - c)}{(ab + cd)^2}$$
Y por tanto, teniendo en cuenta que $0 < \angle B, \angle D < 180 \Rightarrow \sin\angle B > 0$,
$$\sin\angle B = \frac{2\sqrt{(s - a)(s - b)(s - d)(s - c)}}{ab + cd} \Leftrightarrow$$
$$\frac{(ab + cd)\sin\angle B}{2} = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - d)(s - c)} \Leftrightarrow$$
$$\frac{ab\sin\angle B}{2} + \frac{cd\sin\angle B}{2} = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - d)(s - c)} \Leftrightarrow$$
$$[\Delta ABC] + [\Delta ACD] = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - d)(s - c)} \Leftrightarrow$$
$$[\Diamond ABCD] = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - d)(s - c)}$$
donde hemos utilizado que $\sin\angle B = \sin\angle D$ pues son ángulos suplementarios.

9.5.12 Corolario. Área de cuadriláteros cíclicos con circunferencia inscrita.
Si el cuadrilátero es convexo, cíclico y además contiene una circunferencia inscrita, la fórmula de Brahmagupta se reduce a

$$[\Diamond ABCD] = \sqrt{a\,b\,c\,d}$$



Demostración.
Si existe una circunferencia inscrita en el cuadrilátero se tiene que $a+c=b+d$ (9.1.13), y por tanto

$$s = \frac{a+b+c+d}{2} = \frac{2(a+b)}{2} = a+b$$

$$a-s = a-(a+b) = -b,\ b-s = b-(b+d) = -d$$

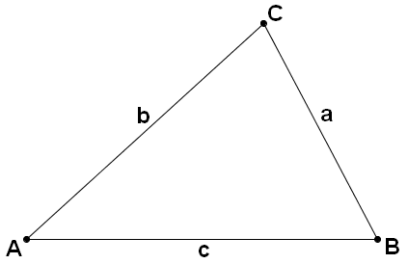
$$c-s = c-(a+c) = -a,\ d-s = d-(b+d) = -b$$

Luego $[\Diamond ABCD] = \sqrt{(a-s)(b-s)(c-s)(d-s)} = \sqrt{(-b)(-d)(-a)(-b)} = \sqrt{a\,b\,c\,d}$

9.5.13 Teorema. Fórmula de Heron.
El área de un triángulo ΔABC es

$$[\Delta ABC] = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

donde s es el semiperímetro $s = (a+b+c)/2$



Demostración.
Puesto que todo triángulo es inscribible, podemos considerar la fórmula de Heron como un caso particular de la fórmula de Brahmagupta cuando C=D, es decir, d=0.

Nota histórica.
Brahmagupta (598 - 670) fue el matemático indio más famoso de su tiempo. Escribió dos importantes tratados en astronomía y matemáticas: Brahmasphutasiddhanta y Khandakhadyaka.

9.5.14 Teorema. La fórmula de Bretschneider.
La fórmula de **Bretschneider** extiende la fórmula de Brahmagupta a cualquier tipo de cuadrilátero, no necesariamente cíclico:

$$A = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cdot \cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

donde a, b, c y d son los lados del cuadrilátero, s su semiperímetro y α y β son dos ángulos opuestos del mismo.

Nota histórica: El matemático alemán **Carl Anton Bretschneider** descubrió esta fórmula en el año 1842. Esta misma fórmula fue descubierta ese mismo año por otro matemático aleman, **Karl Georg Christian von Staudt**.

9.5.15 Corolario.
La fórmula de Bretschneider tiene un interesante corolario: Los cuadriláteros cíclicos don los que tienen un área maximal entre todos aquellos cuadriláteros con la misma secuencia de longitudes en los lados, en particular, entre aquellos con el mismo perímetro.

9.6 La razón áurea.

9.6.1 Definición. Razón áurea.

La definición 3 del Libro Sexto de los Elementos de Euclides propone:
"Se dice que una recta ha sido cortada en extrema y media razón cuando la recta entera es al segmento mayor como el segmento mayor es al segmento menor".

Es decir, un segmento quedará dividido en razón áurea cuando

$$\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b} \text{ con } a>b$$

9.6.2 Definición. El número de oro.

Diremos que dos números a,b, $a>b$, están en razón áurea cuando

$$\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}$$

Definiendo $\phi=\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}$, nos queda $\phi=\frac{a+b}{a}=\frac{a}{a}+\frac{b}{a}=1+\frac{b}{a}=1+\frac{1}{\phi}$,

Y multiplicando por ϕ llegamos a la ecuación $\phi^2=\phi+1$, que tiene por soluciones

$$\phi=\frac{1\pm\sqrt{1-4(-1)}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Tomamos como definición del **número de oro** a la solución positiva de la ecuación, es decir, el número

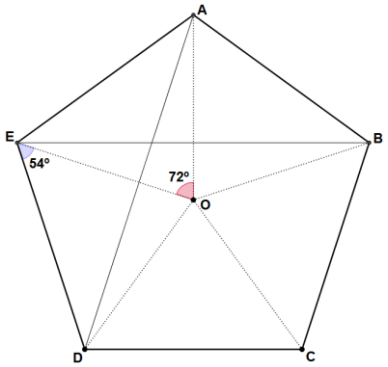
$$\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cong 1.6180339887498948$$

El número áureo aparece con frecuencia en la naturaleza y está ligado con la sucesión de Fibonacci, ya que $\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\phi$, donde F_n es el n-ésimo término de la sucesión.

9.6.3 Teorema.

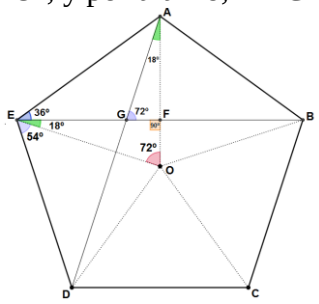
La diagonal y el lado de un pentágono regular están en la razón áurea.

Demostración.
Podemos descomponer un pentágono regular en cinco triángulos isósceles de ángulo central 72º y ángulos laterales de 54º. Trazados dos de sus diagonales, $\overline{AD}$ y $\overline{BE}$:



Los triángulos ΔEAB y ΔDEA son congruentes aplicando el criterio SAS, luego $EB \cong DA$, es decir, todas las diagonales del triángulo son congruentes dos a dos.

Sea F el punto de intersección entre EB y AO y G el punto de corte de las dos diagonales. El cuadrilátero $\Diamond ABOE$ es una cometa, luego sus dos diagonales EB y AO se cortan en ángulo recto (3.12.3). Es decir, $\angle EFD = 90º$. Luego
$\angle FEO = 180 - 72 - 90 = 18º$, $\angle AEF = \angle AED - 108 - 54 - 18 = 36º$
Por simetría $\angle GAF = \angle FEO = 18º$, y por último, $\angle FGA = 180 - 90 - 18 = 72º$



Sea $x = AE = AB = ...$ y sea $y = EB$.
Aplicamos el Teorema del coseno al triángulo ΔEAB:
$x^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos(36º) \Rightarrow 2xy\cos(36º) = y^2 \Rightarrow 2x\cos(36º) = y \Rightarrow$

$$2\cos(36º) = \frac{y}{x} \Rightarrow 2\frac{1+\sqrt{5}}{4} = \frac{y}{x} \Rightarrow \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{y}{x}$$

Si no queremos utilizar la igualdad $\cos(36º) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, (porque su demostración ciertamente es equivalente a nuestro teorema), se puede argumentar alternativamente de la siguiente manera:
El cuadrilátero $\Diamond EBCD$ es cíclico, puesto que lo es el pentágono del que forma parte, luego aplicamos el **teorema de Ptolomeo** (9.5.8) para deducir la igualdad

$$x^2 + xy = y^2 \Rightarrow x^2 + xy - y^2 = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + xy - y^2}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{x^2} + \frac{xy}{x^2} - \frac{y^2}{x^2} = 0$$

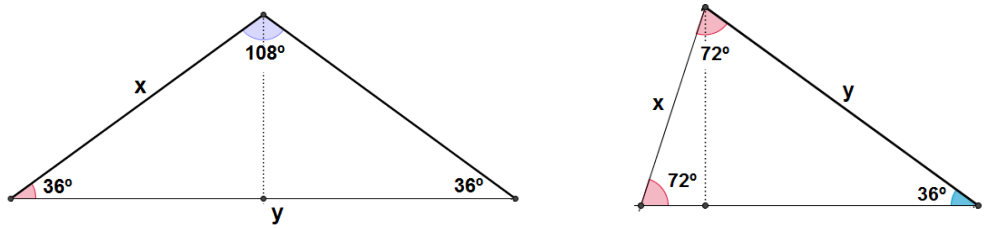
$$\Rightarrow 1 + \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2} = 0$$

Denominando $z = \frac{y}{x}$ nos queda la ecuación

$$1 + z + z^2 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$$

9.6.4 Proposición. Triángulos áuricos.

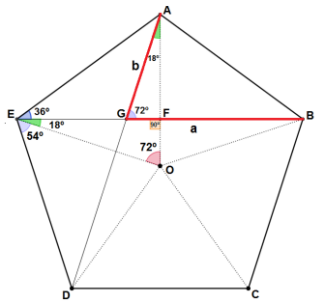
Los triángulos 36-108-36 y 72-36-72 se denominan triángulos áuricos puesto que sus lados están en razón áurea.



$$\phi = \frac{y}{x}$$

Demostración.

El caso del triángulo 36-108-36 se ha visto en el teorema anterior. Apoyándonos en este resultado demostramos el segundo:



Sean $y = EB = AD$, $a = BG = GD$, $b = GA = GE$.

$$\frac{y}{a} = \phi \Rightarrow y = \phi a$$

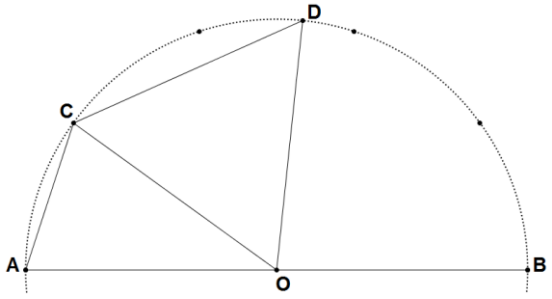
$$\frac{a}{b} = \frac{y-b}{b} = \frac{\phi a - b}{b} = \frac{\phi a}{b} - \frac{b}{b} = \phi \frac{a}{b} - 1 \Rightarrow$$

$$\frac{a}{b} - \phi \frac{a}{b} = -1 \Rightarrow \frac{a}{b}(1-\phi) = -1 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{\phi - 1} = \phi$$

La última igualdad se basa en la propiedad fundamental del número áureo: $\phi^2 = \phi + 1$.

9.6.5 Teorema. Elementos XIII, Proposición 9.

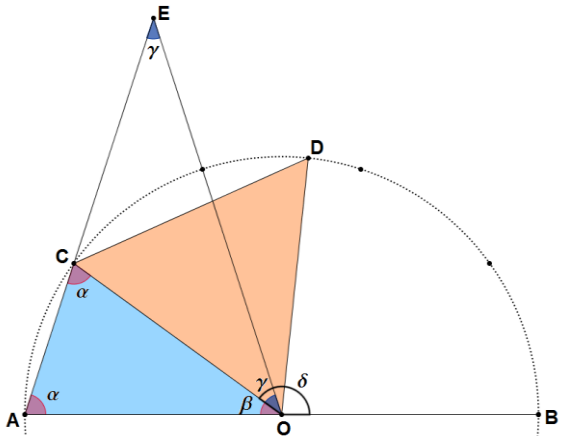
El lado de un hexágono y de un decágono inscritos en el mismo círculo están en la razón áurea.



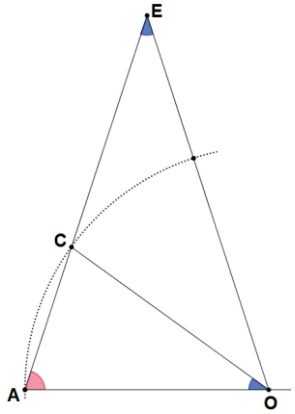
$$\frac{CD + AC}{CD} = \frac{CD}{AC}$$

Encontramos este teorema en la Proposición 9 del libro XIII de Euclides: “Si se unen el lado de un hexágono y el de un decágono inscritos en el mismo círculo, la recta entera queda cortada en extrema y media razón, y su segmento mayor es el lado del hexágono”.

Demostración.
Inscribimos el decágono regular dentro de una circunferencia de centro O y diámetro AB. Sea AC uno de los lados del decágono. Sea D un punto de la circunferencia de forma que CD sea un lado del hexágono. Sabemos (9.2.4) que el lado del hexágono es igual al radio de la circunferencia, luego $CD = CO$.
Prolongamos la semirrecta $\overrightarrow{AC}$ hasta un punto E tal que $CE = CO = CD$.



Sea $\beta = \angle AOC$ y δ su suplementario. Puesto que tratamos con un decágono, $\delta = 4\beta$.
Sea $\gamma = \angle COE$. Por ser ΔCOE isósceles, $\gamma = \angle CEO$.
Sea $\alpha = \angle ACO = \angle CAO$.
Por el teorema del ángulo exterior, $\alpha = 2\gamma$ y $\delta = 2\alpha$, luego $\delta = 4\gamma$.
De $\delta = 4\gamma$ y $\delta = 4\beta$ deducimos que $\delta = \beta$.
Los triángulos ΔAOC y ΔAEO son semejantes por el criterio AA:

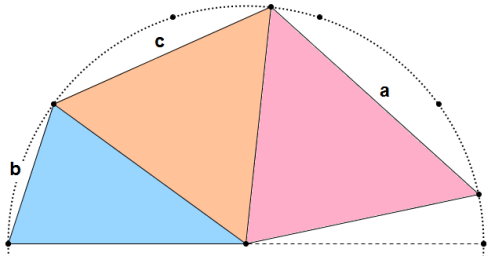


Luego $\frac{AE}{AO} = \frac{AO}{AC}$. Pero $AE = AC + CE = AC + CO = AC + CD$ y $AO = CD$, por lo tanto

$$\frac{AC + CD}{CD} = \frac{CD}{AC}$$

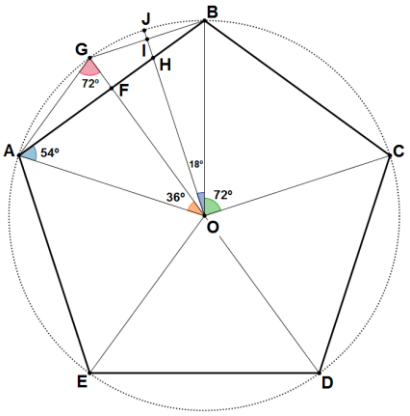
tal y como queríamos ver.

9.6.6 Teorema.
Dado un pentágono regular inscrito en un círculo, el cuadrado de su lado es igual a la suma de los cuadrados de los lados de un hexágono y un decágono inscritos en el mismo círculo.



$$a^2 = b^2 + c^2$$

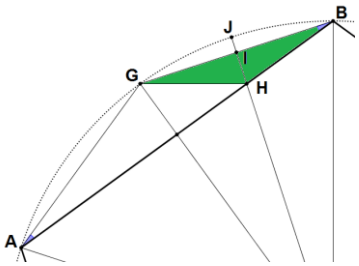
Demostración.
Sea ABCDE un pentágono regular inscrito en una circunferencia de centro O.
Ya hemos visto que este pentágono se desmonta en cinco triángulos isósceles congruentes de ángulos 54º-72º-54º.
Para determinar el decágono regular trazamos la mediatriz del lado AB por su punto medio F, y sea G su punto de corte con la circunferencia. Por las propiedades de los triángulos isósceles, $AG = GB$ será el lado del decágono, formado por diez triángulos isósceles de ángulos 72º-36º-72º.
Trazamos ahora la mediatriz de GB por su punto medio I. Sea J su punto de corte con la circunferencia y sea H su punto de corte con el lado AB del pentágono.



$\angle GOJ = \angle GOB = 18º \Rightarrow \angle AOJ = \angle AOG + \angle GOJ = 36º + 18º = 54º$, luego el triángulo ΔAOH es un triángulo isósceles 54º-72º-54º y por tanto es semejante al triángulo ΔABO .

Luego $\dfrac{AB}{AO} = \dfrac{AO}{AH} \Rightarrow AO^2 = AB \cdot AH$ (1)

Los triángulos ΔAGB y ΔGHB son semejantes, puesto que $\angle GBA = \angle GAB = \angle GAO - \angle BAO = 72º - 54º = 18º$ y ΔGHB es un triángulo isósceles con los mismos ángulos en la base.



Luego $\frac{AB}{AG}=\frac{GB}{GH}$, y puesto que $AG=GB$, tenemos

$$\frac{AB}{AG}=\frac{AG}{GH}\Rightarrow AG^2=AB\cdot GH \quad (2)$$

De (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{l} AO^2=AB\cdot AH \\ AG^2=AB\cdot GH \end{array}\right\}\Rightarrow AB\cdot AH+AB\cdot GH=AO^2+AG^2\Rightarrow$$

$$AB\cdot(AH+GH)=AO^2+AG^2\Rightarrow$$

$$AB^2=AO^2+AG^2$$

(En la última igualdad hemos utilizado $GH=HB\Rightarrow AH+GH=AH+HB=AB$)

Donde AB es el lado del heptágono, AO es el radio y por tanto el lado del hexágono, y AG es el lado del decágono, tal y como queríamos ver.

10 Teoremas de Ceva, Menelao, Desargues y Pappus.

10.1 Cevianas. Teoremas de Ceva y Menelao y su equivalencia.

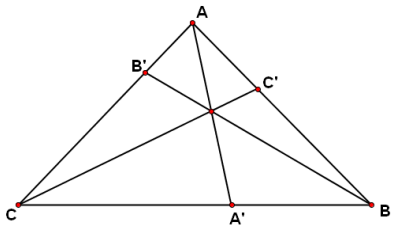
10.1.1 Definición. Ceviana.

Una ceviana es una recta que une un vértice de un triángulo con un punto del lado opuesto. Las alturas, bisectrices, y medianas son cevianas.

10.1.2 Teorema. Teorema de Ceva.

Dado un triángulo ABC y tres cevianas AA', BB' y CC', serán concurrentes en un punto (o paralelas, es decir, concurrentes en la recta del infinito) si y sólo si

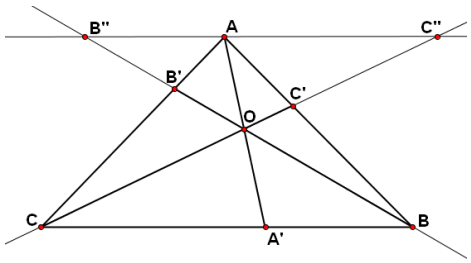
$$\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{CA'}{A'B}\cdot\frac{BC'}{C'A}=1$$



Demostración.

Demostración mediante triángulos proporcionales:

Supongamos que las tres cevianas son concurrentes en un punto O. Trazamos por A una paralela a CB. Sea C'' el punto de intersección entre esta paralela y CC'. Sea B'' el punto de intersección entre esta paralela y BB'.



Nos aparecen cuatro triángulos proporcionales:

$$OCA'\equiv OAC''\Rightarrow\frac{CA'}{A'O}=\frac{AC''}{OA}$$

$$OA'B\equiv OAB''\Rightarrow\frac{A'O}{AO}=\frac{A'B}{AB''}$$

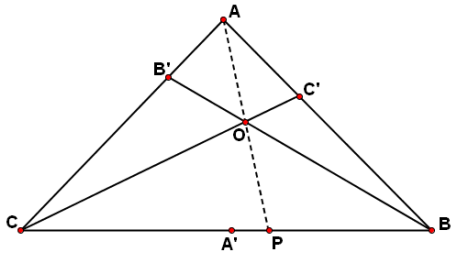
$$OBC'\equiv AC'C''\Rightarrow\frac{BC'}{AC'}=\frac{CB}{AC''}$$

$$CBB'\equiv AB'B''\Rightarrow\frac{AB'}{B'C}=\frac{AB''}{BC}$$

Multiplicando todas las igualdades de la derecha, cancelando términos y pasando todos los elementos restantes a la izquierda llegamos a la igualdad deseada:

$$\frac{CA'}{A'O}\cdot\frac{A'O}{AO}\cdot\frac{BC'}{AC'}\cdot\frac{AB'}{B'C}=\frac{AC''}{OA}\cdot\frac{A'B}{AB''}\cdot\frac{CB}{AC''}\cdot\frac{AB''}{BC}\Rightarrow$$
$$\frac{CA'}{AO}\cdot\frac{BC'}{AC'}\cdot\frac{AB'}{B'C}=\frac{A'B}{OA}\Rightarrow$$
$$\frac{CA'}{A'B}\cdot\frac{BC'}{AC'}\cdot\frac{AB'}{B'C}=1$$

Supongamos por el contrario que la igualdad anterior se satisface para el triángulo ABC y los tres puntos A', B' y C' de los lados BC, AC y AB respectivamente. Sea O el punto de intersección de las rectas CC' y BB'. Sea P el punto de intersección entre AO y BC. Vamos a ver que P=A'.



Al triángulo anterior podemos aplicar el resultado anterior y por lo tanto

$$\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{CP}{PB}\cdot\frac{BC'}{C'A}=1$$

pero por hipótesis tenemos que también se cumple $\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{CA'}{A'B}\cdot\frac{BC'}{C'A}=1$

Luego $\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{CP}{PB}\cdot\frac{BC'}{C'A}=\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{CA'}{A'B}\cdot\frac{BC'}{C'A}$

De donde deducimos que $\frac{CP}{PB}=\frac{CA'}{A'B}$

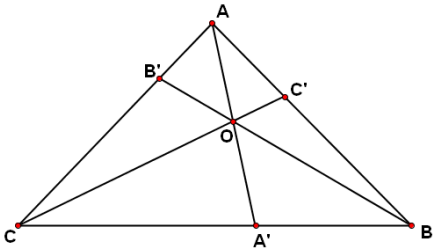
De donde se deduce que $P=A'$.

Fuente de la demostración: http://sistemas.fciencias.unam.mx/~mglgm/NotasGM_cap4.pdf

Demostración mediante áreas:

Recordemos que las áreas de los triángulos con igual altura son proporcionales a las bases.

Notación: Recordamos que denotamos por [XYZ] el área del triángulo XYZ.



$$\frac{CA'}{A'B}=\frac{[ACA']}{[AA'B]}=\frac{[OCA']}{[OA'B]}=\frac{[ACA']-[OCA']}{[AA'B]-[OA'B]}=\frac{[ACO]}{[BAO]}$$

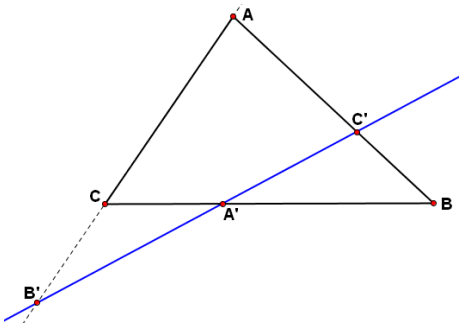
De la misma manera: $\frac{BC'}{C'A}=\frac{[CBO]}{[ACO]}$ y $\frac{AB'}{B'C}=\frac{[ABO]}{[CBO]}$

Por lo tanto: $\frac{CA'}{A'B}\frac{BC'}{C'A}\frac{AB'}{B'C}=\frac{[ACO]}{[BAO]}\frac{[CBO]}{[ACO]}\frac{[ABO]}{[CBO]}=1$

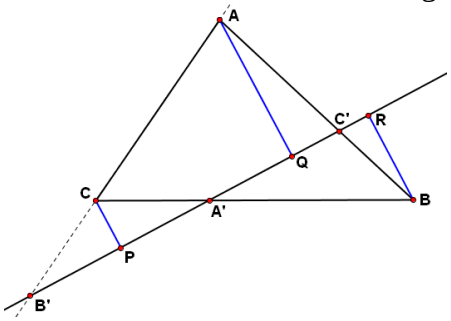
Fuente de la demostración: Coxeter.

10.1.3 Teorema. Teorema de Menelao.
Sea ABC un triángulo y A', B' y C' tres puntos sobre las rectas BC, AC y AB respectivamente. Los tres puntos A', B' y C' estarán alineados si y sólo si

$$\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{CA'}{A'B}\cdot\frac{BC'}{C'A}=-1$$



Demostración. Sean P, Q y R los puntos de intersección entre la recta y las perpendiculares a ésta que pasan por C, A y B respectivamente. Al ser estas perpendiculares paralelas entre ellas obtenemos varios triángulos proporcionales



$\frac{AB'}{B'C}=\frac{AQ}{PC}$ porque los triángulos AQB' y CPB' son proporcionales.

$\frac{CA'}{A'B}=\frac{CP}{RB}$ porque los triángulos PCA' y $A'BR$ son proporcionales.

$\frac{BC'}{C'A}=\frac{BR}{QA}$ porque los triángulos BRC' y AQC' son proporcionales.

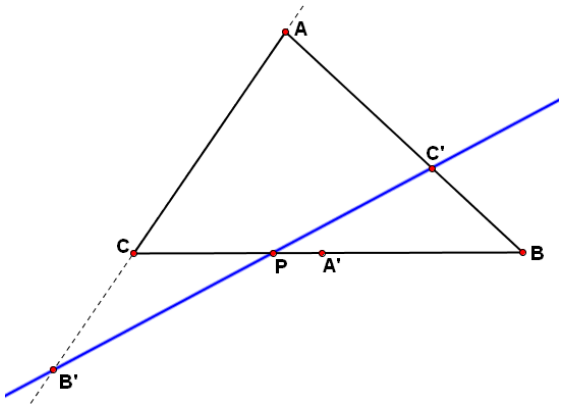
Luego $\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{CA'}{A'B}\cdot\frac{BC'}{C'A}=(-1)(-1)(-1)=-1$

En esta igualdad utilizamos la convención de las longitudes de segmento con signo:
$PC=-CP$, $RB=-BR$ y $AQ=-QA$.

Supongamos recíprocamente que A', B' y C' dos tres puntos en las rectas BC, AC y AB respectivamente cumpliendo la propiedad

$$\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{CA'}{A'B}\cdot\frac{BC'}{C'A}=-1$$

Sea P el punto de intersección entre la recta B'C' y BC. Vamos a ver que $P=A'$:



El triángulo ABC con los tres puntos alineados B', P y C' cumple la condición de la primera parte de esta demostración, luego

$$\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{CP}{PB}\cdot\frac{BC'}{C'A}=-1$$

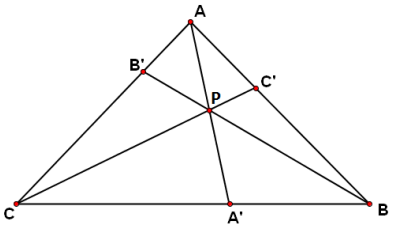
Por lo tanto $\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{CP}{PB}\cdot\frac{BC'}{C'A}\cdot\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{CA'}{A'B}\cdot\frac{BC'}{C'A}=(-1)(-1)=1$ pero simplificando llegamos a

$\frac{CP}{PB}\cdot\frac{CA'}{A'B}=1\Rightarrow\frac{CP}{PB}=\frac{A'B}{CA'}$, y por tanto $P=A'$.

Fuente de la demostración: http://sistemas.fciencias.unam.mx/~mglgm/NotasGM_cap4.pdf

10.1.4 Proposición.
Demostración del teorema de Ceva mediante el teorema de Menelao.

Demostración.
Sea ABC un triángulo y supongamos que tres cevianas AA', BB' y CC' concurren en un mismo punto P.



Aplicando el teorema de Menelao al triángulo ACA' y la recta B'P, tenemos que

$$\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{CB}{BA'}\cdot\frac{A'P}{PA}=-1$$

Aplicando el teorema de Menelao al triángulo AA'B y la recta PC', tenemos que

$$\frac{BC'}{C'A}\cdot\frac{AP}{PA'}\cdot\frac{A'C}{CB}=-1$$

Multiplicamos estas dos igualdades:

$$1=(-1)(-1)=\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{CB}{BA'}\cdot\frac{A'P}{PA}\cdot\frac{BC'}{C'A}\cdot\frac{AP}{PA'}\cdot\frac{A'C}{CB}=\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{A'C}{BA'}\cdot\frac{BC'}{C'A}$$

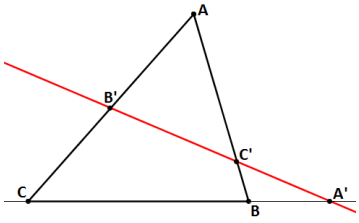
Donde hemos utilizado $\frac{A'P}{PA}\cdot\frac{AP}{PA'}=1$ y $\frac{CB}{CB}=1$

Luego $1=\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{A'C}{BA'}\cdot\frac{BC'}{C'A}\Rightarrow 1=\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{CA'}{A'B}\cdot\frac{BC'}{C'A}$

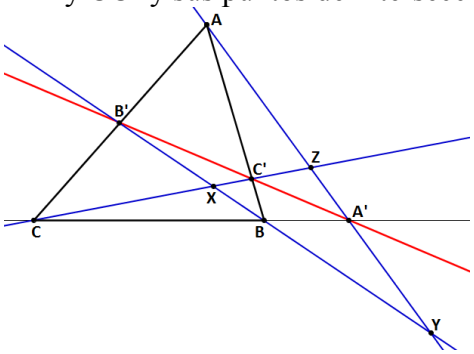
El recíproco se demuestra por contradicción.

10.1.5 Proposición.
Demostración del teorema de Menelao mediante el teorema de Ceva.

Demostración.
Sea un triángulo ABC y A', B' y C' tres puntos alineados en sus lados:

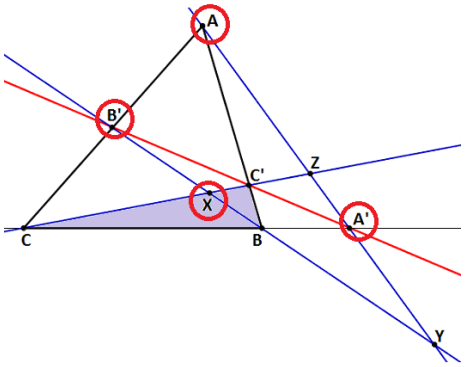


Trazamos las rectas AA', BB' y CC' y sus puntos de intersección:



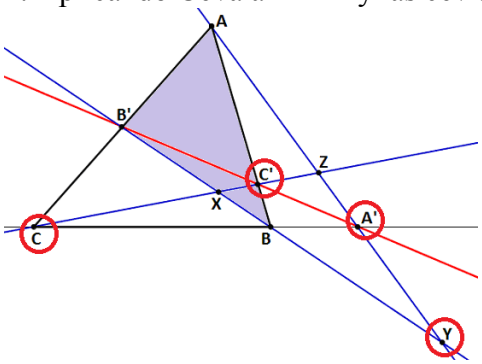
$X = BB' \cap CC'$, $Y = AA' \cap BB'$ y $Z = AA' \cap CC'$

1. Aplicando Ceva a CBC' y las cevianas CA, BX, C'A' (concurrentes en B'):



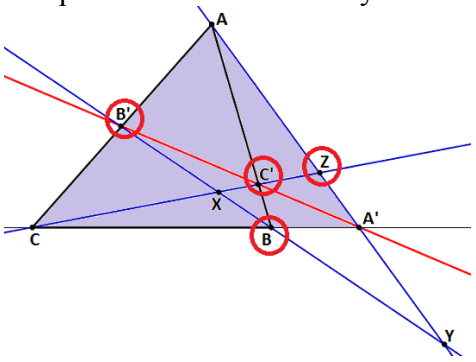
$$\frac{CA'}{A'B} \cdot \frac{BA}{AC'} \cdot \frac{C'X}{XC} = -1$$

2. Aplicando Ceva a BAB' y las cevianas BC, AY, B'C' (concurrentes en A'):



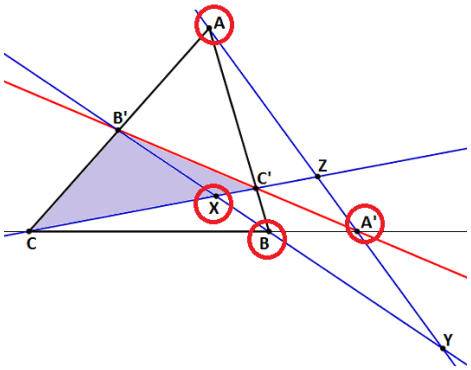
$$\frac{AC}{CB'} \cdot \frac{B'Y}{YB} \cdot \frac{BC'}{C'A} = -1$$

3. Aplicando Ceva a AA'C y las cevianas AB, A'B', CZ (concurrentes en C'):



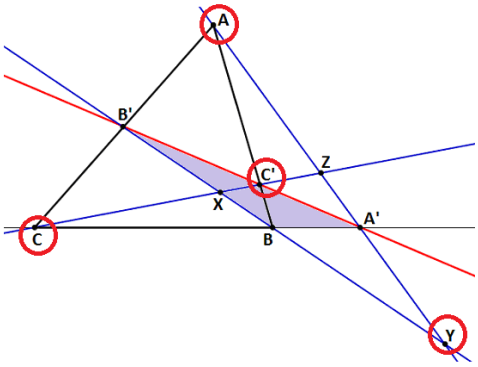
$$\frac{CB}{BA'} \cdot \frac{A'Z}{ZA} \cdot \frac{AB'}{B'C} = -1$$

4. Aplicando Ceva a AA'C y las cevianas AB, A'B', CZ (concurrentes en C'):



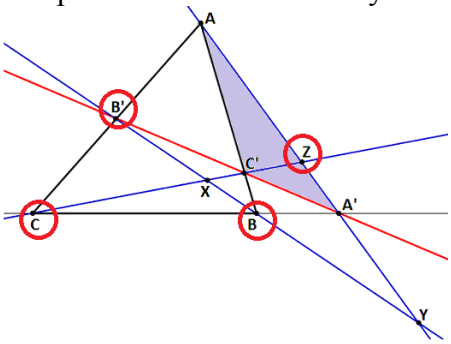
$$\frac{C'A'}{A'B'} \cdot \frac{B'A}{AC} \cdot \frac{CX}{XC'} = -1$$

5. Aplicando Ceva a B'BA' y las cevianas B'Y, BC', A'Y (concurrentes en A):



$$\frac{A'C}{CB}\cdot\frac{BY}{YB'}\cdot\frac{B'C'}{C'A'}=-1$$

6. Aplicando Ceva a AA'C' y las cevianas AB', A'B, C'Z (concurrentes en C):



$$\frac{A'B'}{B'C'}\cdot\frac{C'B}{BA}\cdot\frac{AZ}{ZA'}=-1$$

Multiplicamos estas seis igualdades:

$$1=(-1)^6=\frac{CA'}{A'B}\frac{BA}{AC'}\frac{C'X}{XC}\frac{AC}{CB'}\frac{B'Y}{YB}\frac{BC'}{C'A}\frac{CB}{BA'}\frac{A'Z}{ZA}\frac{AB'}{B'C}\cdot$$

$$\cdot\frac{C'A'}{A'B'}\frac{B'A}{AC}\frac{CX}{XC'}\frac{A'C}{CB}\frac{BY}{YB'}\frac{B'C'}{C'A'}\frac{A'B'}{B'C'}\frac{C'B}{BA}\frac{AZ}{ZA'}=$$

$$=\frac{CA'}{A'B}\frac{BC'}{AC'}\frac{AB'}{CB'}\frac{B'A}{C'A}\frac{A'C}{BA'}\frac{C'B}{B'C}=\frac{CA'}{A'B}\frac{A'C}{BA'}\frac{BC'}{C'A}\frac{C'B}{AC'}\frac{AB'}{B'C}\frac{B'A}{CB'}$$

$$=\frac{CA'}{A'B}\frac{CA'}{A'B}\frac{BC'}{C'A}\frac{BC'}{C'A}\frac{AB'}{B'C}\frac{AB'}{B'C}$$

$$=\frac{CA'}{A'B}\frac{BC'}{C'A}\frac{AB'}{B'C}\frac{CA'}{A'B}\frac{BC'}{C'A}\frac{AB'}{B'C}=\left(\frac{CA'}{A'B}\frac{BC'}{C'A}\frac{AB'}{B'C}\right)^2\Rightarrow\frac{CA'}{A'B}\frac{BC'}{C'A}\frac{AB'}{B'C}=\pm1$$

Pero $\frac{CA'}{A'B}\frac{BC'}{C'A}\frac{AB'}{B'C}\neq-1$, pues en caso contrario, aplicando Ceva, las rectas AA', BB' y CC' serían concurrentes.

Luego

$$\frac{CA'}{A'B}\frac{BC'}{C'A}\frac{AB'}{B'C}=1$$

Nota: Esta demostración originariamente se debe a John R.Silvester.

10.1.6 Corolario.

Los teoremas de Ceva y de Menelao son equivalentes.

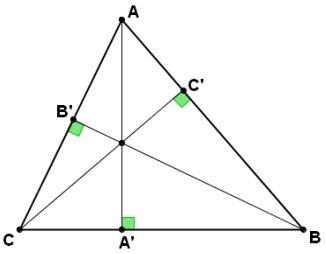
Demostración.

10.2 Rectas y puntos notables del triángulo (3).

10.2.1 Proposición. Ortocentro.

Las tres alturas de un triángulo se cortan en un único punto llamado **ortocentro**.

Demostración:



$$\left.\begin{aligned}\cos B = \frac{BC'}{BC} \Rightarrow BC' = BC\cos B \\ \cos A = \frac{AC'}{AC} \Rightarrow AC' = AC\cos A\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{BC'}{C'A} = \frac{BC\cos B}{AC\cos A}$$

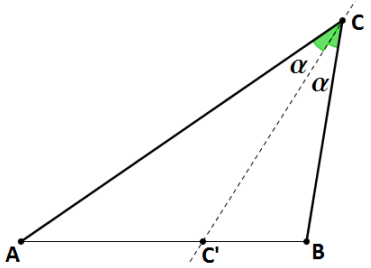
De la misma manera $\frac{CA'}{A'B} = \frac{AC\cos C}{AB\cos B}$ y $\frac{AB'}{B'C} = \frac{AB\cos A}{BC\cos C}$

Y aplicamos el teorema de Ceva: $\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{CA'}{A'B}\cdot\frac{BC'}{C'A} = \frac{AB\cos A}{BC\cos C}\cdot\frac{AC\cos C}{AB\cos B}\cdot\frac{BC\cos B}{AC\cos A} = 1$

Nota: En una demostración más rigurosa tendríamos que analizar el signo del coseno para posibles ángulos obtusos, y comprobar que el razonamiento es igualmente válido. Si el triángulo es rectángulo las alturas se cortan en el vértice cuyo ángulo es recto.

10.2.2 Proposición. Teorema de la bisectriz interior.

Si CC' es la bisectriz interior al vértice C de un triángulo ΔABC , se cumple



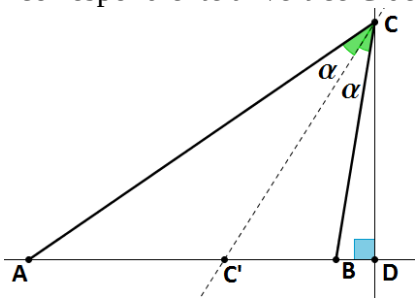
$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{AC}{CB}$$

Es decir, una bisectriz de un triángulo divide a su lado opuesto en segmentos proporcionales a los lados adyacentes.

Demostración.
Por 7.2.9 sabemos que
$\alpha(\Delta ACC') = AC\cdot CC'\cdot\sin(\alpha)/2$ y $\alpha(\Delta C'CB) = BC\cdot CC'\cdot\sin(\alpha)/2$
Luego

$$\frac{\alpha(\Delta ACC')}{\alpha(\Delta C'CB)} = \frac{AC \cdot CC' \cdot \sin(\alpha)/2}{BC \cdot CC' \cdot \sin(\alpha)/2} = \frac{AC}{BC}$$

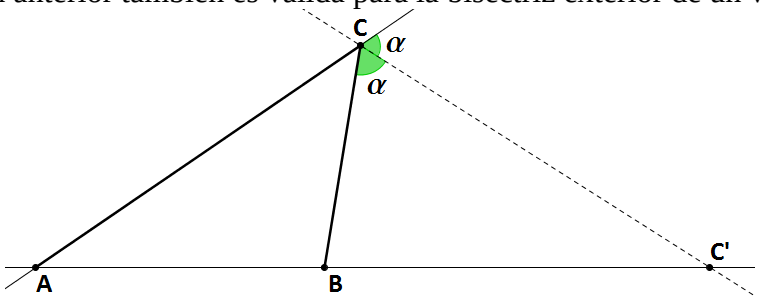
Ahora trazamos la altura CD correspondiente al vértice C del triángulo.



$$\frac{\alpha(\Delta ACC')}{\alpha(\Delta C'CB)} = \frac{AC' \cdot CD/2}{C'B \cdot CD/2} = \frac{AC'}{C'B}$$, luego $$\frac{AC'}{C'B} = \frac{AC}{BC}$$

10.2.3 Proposición. Teorema de la bisectriz exterior.

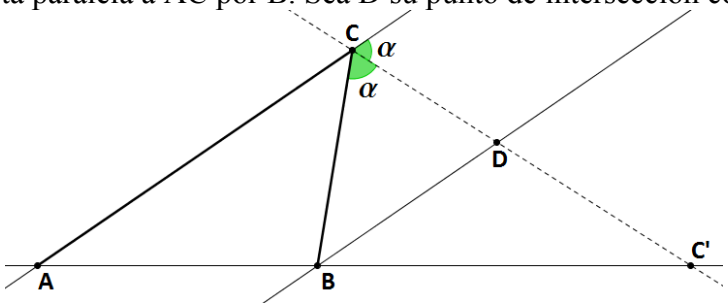
La proposición anterior también es válida para la bisectriz exterior de un vértice:



$$\frac{C'A}{C'B} = \frac{AC}{CB}$$

Demostración.

Trazamos la recta paralela a AC por B. Sea D su punto de intersección con CC'



$AC \,//\, BD \Rightarrow \angle CDB = \alpha$ por el Recíproco del teorema de los ángulos internos alternos (4.3.5).

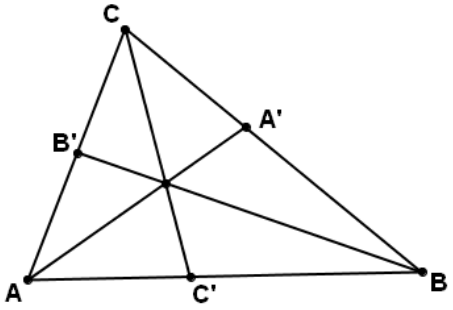
Luego ΔBCD es isósceles en C: $\alpha = \angle CDB = \angle BCD$, y por consiguiente $BC = BD$.

Por otro lado, $AC \,//\, BD \Rightarrow \angle BAC = \angle C'BD, \angle ACC' = \angle BDC$, de lo que deducimos que los triángulos $\Delta AC'C$ y $\Delta BC'D$ son semejantes, pues tienen los mismos ángulos.

Por lo tanto tendrán lados proporcionales: $\frac{C'A}{C'B} = \frac{AC}{BD} = \frac{AC}{BC}$

10.2.4 Corolario.
Las bisectrices de un triángulo se encuentran en un único punto llamado **incentro**.

Demostración.



Por 10.2.2 sabemos que

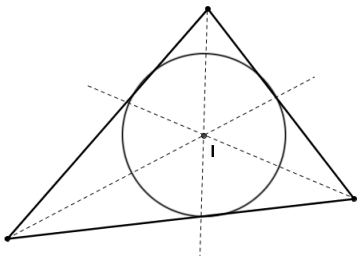
$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{AC}{CB},\ \frac{BA'}{A'C} = \frac{BA}{AC},\ \frac{CB'}{B'A} = \frac{CB}{BA}$$

luego

$$\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CA'}{A'B} \cdot \frac{BC'}{C'A} = \frac{B'A}{CB'} \cdot \frac{A'C}{BA'} \cdot \frac{C'B}{AC'} = \frac{BA}{CB} \cdot \frac{AC}{BA} \cdot \frac{CB}{AC} = 1$$

y basta aplicar el teorema de Ceva (10.1.2).

10.2.5 Proposición.
El incentro equidista de los tres lados, por lo que es el centro de la circunferencia inscrita.

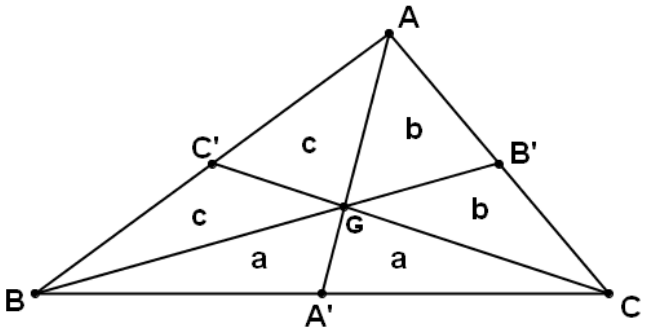


10.2.6 Proposición.
Las medianas de un triángulo se encuentran en un punto único llamado **baricentro** ("centroid").

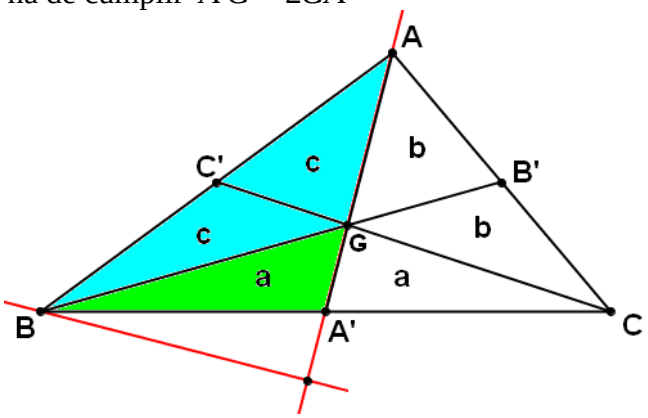
Demostración.
$\frac{AB'}{B'C} = \frac{CA'}{A'B} = \frac{BC'}{C'A} = 1$ luego claramente $\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CA'}{A'B} \cdot \frac{BC'}{C'A} = 1$, y basta aplicar el teorema de Ceva.

10.2.7 Proposición.
a) Las medianas de un triángulo determinan seis triángulos internos de la misma área.
b) Las medianas de un triángulo se cortan en razón 2:1.

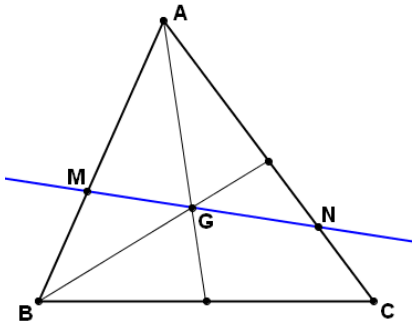
Demostración. Sea un triángulo ΔABC y sus medianas AA', BB' y CC'. Sea G su baricentro. Los triángulos marcados con la misma letra tienen áreas iguales, pues tienen la misma base y comparten una altura común.



Pero por el mismo motivo $(\Delta BCC') = (\Delta ACC')$, luego $2a + c = 2b + c$.
De la misma manera, $(\Delta BAA') = (\Delta CAA')$, y por tanto $2c + a = 2b + a$, así pues $a = b = c$, es decir, los seis triángulos tienen la misma área.
Ahora tenemos que $(\Delta ABG) = 2(\Delta GBA')$, y como ambos triángulos comparten una altura, por 4.5.5 se ha de cumplir $A'G = 2GA'$



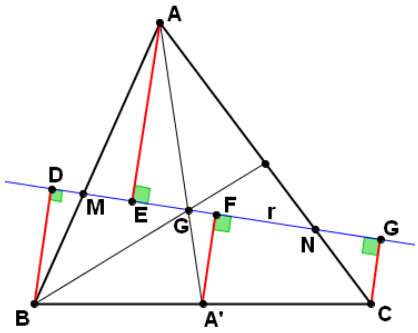
10.2.8 Proposición. Caracterización del baricentro.
Sea un triángulo y G su baricentro. Sea M un punto cualquiera de $\overline{AB}$ y sea $r = \overleftrightarrow{MG}$.
Supongamos que la recta r corta $\overline{AC}$ en un punto N.



Entonces se cumple $\frac{BM}{MA} + \frac{CN}{NA} = 1$ y esta propiedad caracteriza el baricentro.

Demostración: Sea A' el punto medio de $\overline{BC}$. Trazamos perpendiculares a r por B, A, A' y C. Sean D, E, F y G los puntos de corte de dichas perpendiculares con la recta r.

Tenemos que $A'F = \frac{BD+CG}{2}$



Los triángulos ΔAEG y $\Delta A'FG$ son semejantes (Criterio AA) y $GA = 2GA'$ por 6.3.16(b), luego $AE = 2FA'$, y por lo tanto $AE = 2FA' = 2\frac{BD+CG}{2} = BD+CG$.

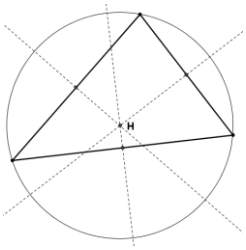
Los triángulos ΔBDM y ΔAEM son semejantes (criterio AA), luego

$$\frac{BM}{MA} + \frac{CN}{NA} = \frac{BD}{EA} + \frac{CG}{AE} = \frac{BD+CG}{EA} = \frac{AE}{EA} = 1$$

Fuente:

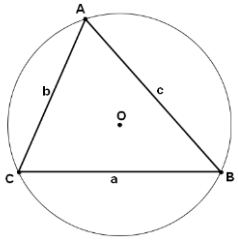
10.2.9 Proposición.

El circuncentro equidista de los tres vértices, por lo que es el centro de la circunferencia circunscrita.



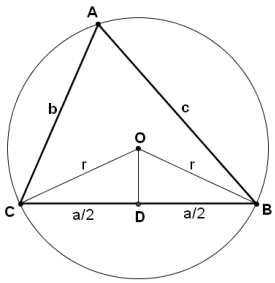
10.2.10 Teorema. El teorema del seno.

Sea ABC un triángulo y O el centro de su circunferencia circunscrita. Sea r el radio de esta circunferencia.



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2r$$

Demostración. Lanzamos los segmentos CO y OB. Sea D el punto medio del segmento CB. La perpendicular a CB que pasa por D es una mediatriz del triángulo por lo tanto pasa por el centro O.



Por 8.1.1, $A = \angle CAB = \dfrac{\angle COB}{2} = \dfrac{2\angle DOB}{2} \Rightarrow A = \angle DOB$

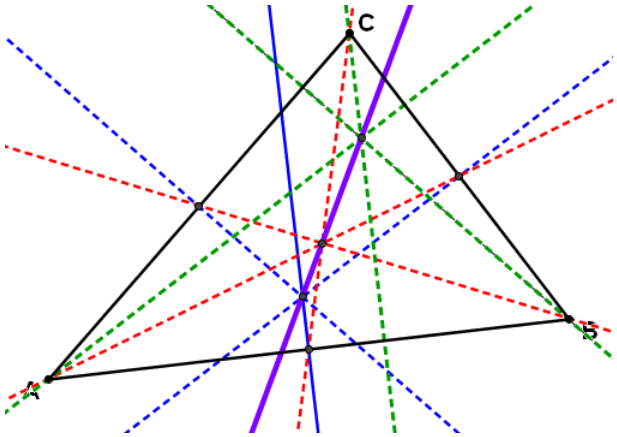
Pero por definición del seno de un ángulo tenemos $\sin(\angle DOB) = \dfrac{a/2}{r}$

Por lo tanto $\sin A = \dfrac{a/2}{r} \Leftrightarrow \sin A = \dfrac{a}{2r} \Leftrightarrow 2r \sin A = a \Leftrightarrow \sin A = \dfrac{a}{2r}$

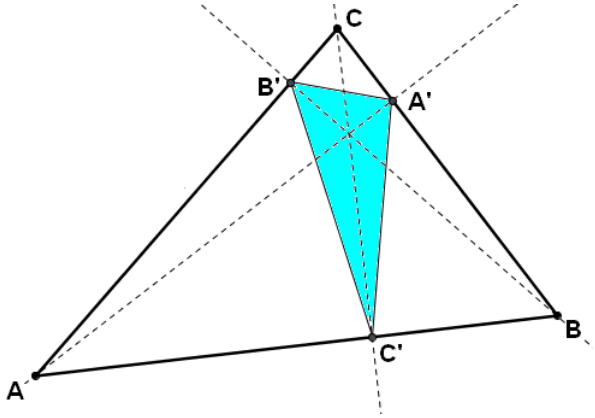
De la misma forma se demuestran las igualdades con los ángulos B y C.

De forma similar se demuestra este teorema cuando el circuncentro cae fuera del triángulo.

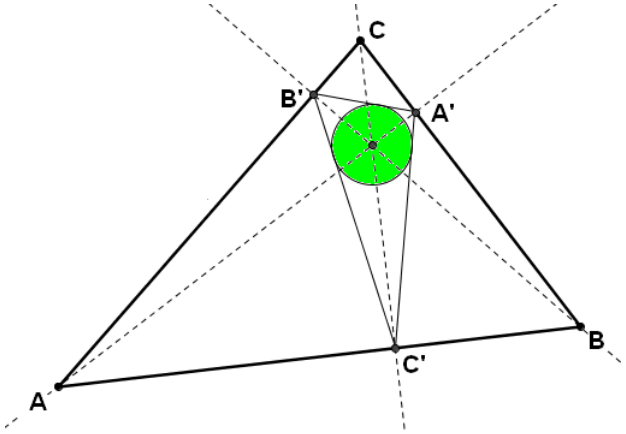
10.2.11 Teorema. La recta de Euler.
El baricentro, el circuncentro y el ortocentro de un triángulo están alineados. La recta que pasa por estos tres puntos se denomina Recta de Euler.



10.2.12 Definición. Triángulo órtico.
El triángulo órtico es el triangulo determinado por las bases de las alturas del triángulo.



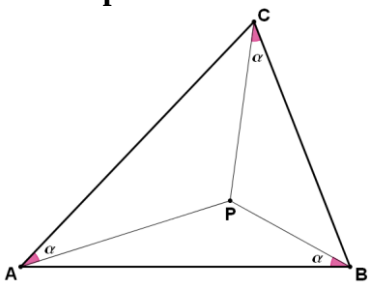
Las alturas del triángulo son las bisectrices del triángulo órtico, por lo que el ortocentro del triángulo es el incentro del triángulo órtico, es decir, el centro de su circunferencia inscrita.



10.2.13 Teorema. Los puntos de Brocard.
Dado un triángulo ΔABC, existirá un único punto P en su interior tal que

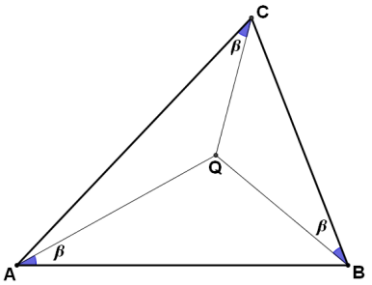
$$\alpha = \angle PBA \cong \angle PAC \cong \angle PCB$$

A dicho punto le llamaremos **Primer punto de Brocard**.

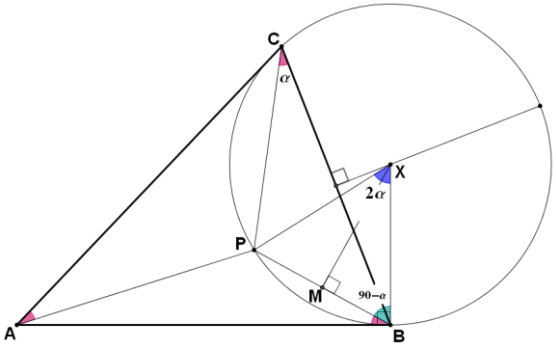


El **Segundo punto de Brocard** es aquel que satisface la misma propiedad pero tomando los ángulos en sentido contrario:

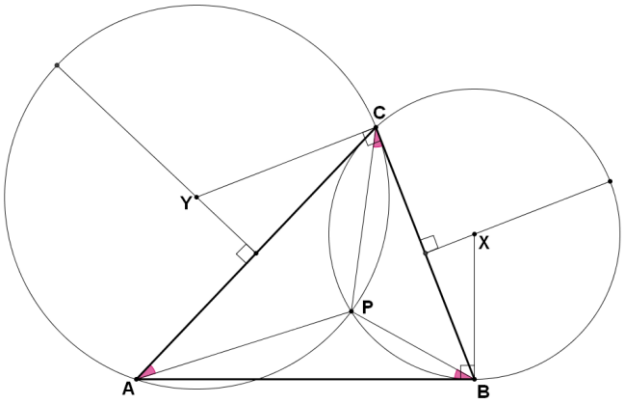
$$\beta = \angle QAB \cong \angle QCA \cong \angle QBC$$



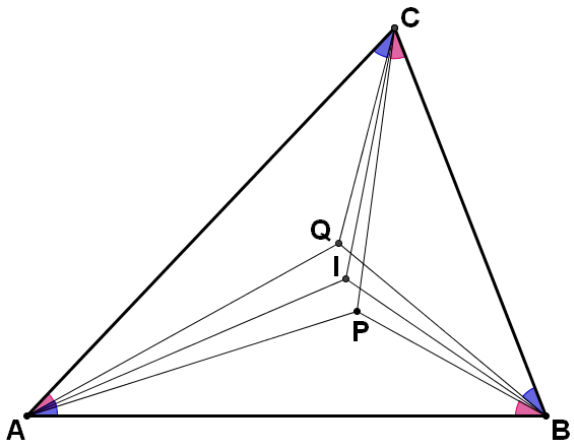
Demostración.
Supongamos que dicho punto P existe. Sea $\alpha = \angle PBA = \angle PAC = \angle PCB$.
Sabemos que el centro X de la circunferencia circunscrita al triángulo ΔPBC queda determinado por la intersección de las bisectrices de los lados, luego
$\alpha = \angle PBA \Rightarrow 2\alpha = \angle PXB$ puesto que es un ángulo central que abarca el mismo arco (9.1.1). Si M es el punto medio del segmento $\overline{BP}$, el triángulo ΔPXB es isósceles, luego M es bisectriz de $\angle X$ y por tanto $\angle MXB = 2\alpha/2 = \alpha$. Puesto que $MX \perp PB$, $\angle MBX = 90 - \angle MXB = 90 - \alpha$, y finalmente
$\angle ABX = \angle ABP + \angle PBX = \alpha + 90 - \alpha = 90^{\circ}$.
Con esto hemos comprobado que la recta AB es tangente a la circunferencia en el punto B, y podemos determinar dicha circunferencia sin tener localizado el punto P.



Determinamos ahora la circunferencia circunscrita al triángulo ΔACP. Como en el caso anterior, su centro Y será la intersección entre la bisectriz de $\overline{AC}$ y la perpendicular a $\overline{BC}$ por C. El punto P pertenece a ambas circunferencias, y no es C, luego será el otro punto de intersección. Con esto hemos comprobado que dicho punto P existe y es único, y además hemos obtenido un método para determinarlo.



10.2.14 Proposición. Los dos puntos de Brocard son conjugados isogonales.

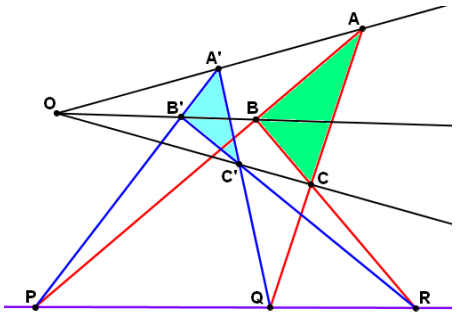


Demostración.

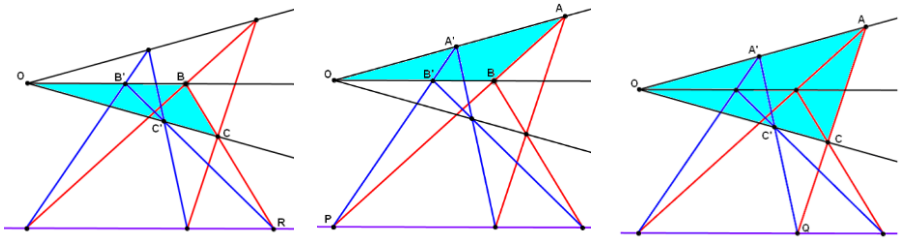
10.3 Teoremas de Desargues y Pappus.

10.3.1 Teorema. Teorema de Desargues.

Dos triángulos ABC y A'B'C' están en perspectiva desde un punto O (es decir, las tres rectas AA', BB' y CC' pasan por un mismo punto O), si y sólo si los puntos $P = AB \cap A'B'$, $Q = AC \cap A'C'$ y $R = BC \cap B'C'$ están alineados.



Demostración. Aplicaremos varias veces el teorema de Menelao. Supongamos que los triángulos ABC y A'B'C' están en perspectiva desde el punto O.



Aplicando el Teorema de Menelao al triángulo OBC y la recta B'C'R, tenemos que

$$\frac{CR}{RB} \cdot \frac{BB'}{B'O} \cdot \frac{OC'}{C'C} = -1$$

Aplicando el teorema de Menelao al triángulo OAB y la recta A'B'P, tenemos que

$$\frac{BP}{PA} \cdot \frac{AA'}{A'O} \cdot \frac{OB'}{B'B} = -1$$

Aplicando el teorema de Menelao al triángulo OAC y la recta A'C'Q tenemos que

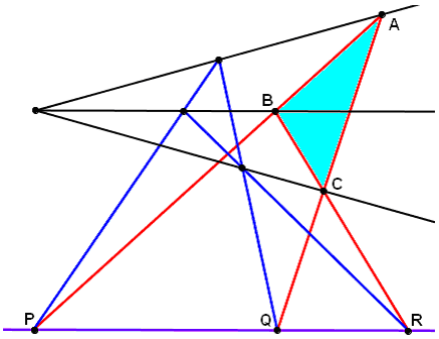
$$\frac{AQ}{QC} \cdot \frac{CC'}{C'O} \cdot \frac{OA'}{A'A} = -1$$

Multiplicamos las tres igualdades anteriores:

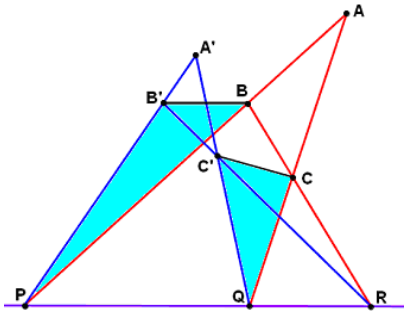
$$\frac{CR}{RB} \cdot \frac{BB'}{B'O} \cdot \frac{OC'}{C'C} \cdot \frac{BP}{PA} \cdot \frac{AA'}{A'O} \cdot \frac{OB'}{B'B} \cdot \frac{AQ}{QC} \cdot \frac{CC'}{C'O} \cdot \frac{OA'}{A'A} = (-1)(-1)(-1) = -1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{CR}{RB} \cdot \frac{BP}{PA} \cdot \frac{AQ}{QC} = -1$$

Esta tercera igualdad, en el triángulo ABC y nuevamente aplicando el teorema de Desargues, garantiza que los puntos P, Q y R están alineados, tal y como queríamos ver:



Supongamos por el contrario que los puntos P, Q y R están alineados. Consideramos los triángulos BB'P y CC'Q.



Estos triángulos están en perspectiva respecto del punto R, por lo que podemos aplicar la primera parte de este teorema para afirmar que los tres puntos $BB'\cap CC'$, $PB\cap QC=A$ y $PB'\cap QC'=A'$ están alineados.

Definiendo $O=BB'\cap CC'$, de lo anterior se deduce que la recta AA' pasa por O, es decir, que los triángulos ABC y A'B'C' están en perspectiva respecto de este punto O.

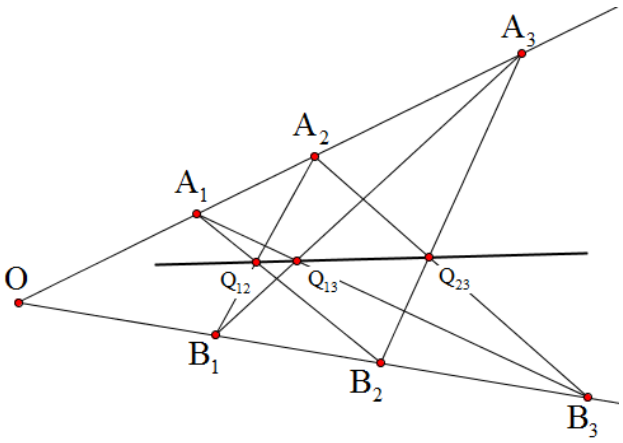
Fuente de la demostración: http://sistemas.fciencias.unam.mx/~mglgm/NotasGM_cap4.pdf

10.3.2 Teorema. Teorema de Pappus.

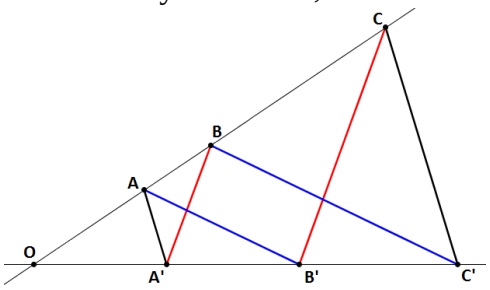
Sean dos rectas r y s que se cortan en un punto O.

Sean A_1, A_2, A_3 tres puntos diferentes de r, B_1, B_2, B_3 tres puntos diferentes de s, y todos diferentes de O.

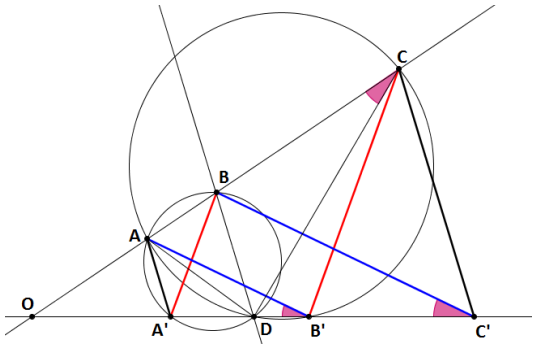
Entonces los tres puntos $Q_{12}=\overleftrightarrow{A_1B_2}\cap\overleftrightarrow{A_2B_1}$, $Q_{23}=\overleftrightarrow{A_2B_3}\cap\overleftrightarrow{A_3B_2}$ y $Q_{13}=\overleftrightarrow{A_1B_3}\cap\overleftrightarrow{A_3B_1}$ están alineados.



10.3.3 Proposición. Teorema de Pappus simplificado en un plano euclídeo.
Sean dos rectas que se cortan en un punto O. Sean A, B, C tres puntos en la primera recta y A', B', C' tres puntos de la segunda recta todos diferentes de O. Si los triángulos $\Delta OAA'$ y $\Delta OCC'$ son isósceles en O y $AB // B'C$, entonces $AB' // BC'$.



Demostración: Desde B trazamos una paralela a AA' que cortará OC' en un punto D.
El cuadrilátero ABA'D es cíclico, pues $\angle ABD = \angle OA'A$ y por tanto $\angle AA'D$ y $\angle ABD$ son suplementarios.
Por lo tanto $\angle ADA' = \angle ABA'$ y puesto que $A'B // B'C$, tenemos $\angle ABA' = \angle ACB'$. Así pues, los ángulos $\angle ADC'$ y $\angle ACB'$ son suplementarios, y por tanto el cuadrilátero ACB'D es cíclico. Por lo tanto $\angle AB'D = \angle ACD$.



Pero $\angle ACD = \angle OCD = \angle OC'B$ puesto que los triángulos ΔOBD y ΔODC son congruentes (criterio SAS).
Así pues $\angle OB'A = \angle AB'D = \angle OC'B$ y por tanto $AB' // BC'$ como queríamos ver.

[Rothe]

11 Transformaciones euclídeas.

11.1 Isometrías.

11.1.1 Definición. Isometría.

Una isometría es una función $f : IE \to IE$ del plano euclídeo en sí mismo biyectiva y que conserva la distancia, esto es:

$$\forall P, Q \in IE, \left|\overline{f(P)\,f(Q)}\right| = \left|\overline{PQ}\right|$$

11.1.2. Proposición.

Las isometrías conservan la congruencia:

$$\overline{AB} \cong \overline{CD} \Rightarrow \overline{f(A)\,f(B)} \cong \overline{f(C)\,f(D)}$$

Demostración.

Aplicamos la propiedad L2 de la medida de segmentos:

$$\overline{AB} \cong \overline{CD} \Rightarrow \left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{CD}\right| \Rightarrow \left|\overline{f(A)\,f(B)}\right| = \left|\overline{f(C)\,f(D)}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{f(A)\,f(B)} = \overline{f(C)\,f(D)}$$

11.1.3 Proposición.

Las isometrías mantienen el orden:

$$A * B * C \Leftrightarrow f(A) * f(B) * f(C)$$

Demostración.

Aplicamos la propiedad L1 de la medida de segmentos:

$$A * B * C \Leftrightarrow \left|\overline{AC}\right| = \left|\overline{AB}\right| + \left|\overline{BC}\right| \Leftrightarrow \left|\overline{f(A)\,f(C)}\right| = \left|\overline{f(A)\,f(B)}\right| + \left|\overline{f(B)\,f(C)}\right| \Leftrightarrow$$

$$f(A) * f(B) * f(C)$$

11.1.4 Proposición.

Las isometrías transforman rectas en rectas:

$$\text{Sea } r = \overleftrightarrow{AB}. \text{ Entonces } f(\overleftrightarrow{AB}) = \overleftrightarrow{f(A)\,f(B)}$$

Demostración.

Veamos $f(\overleftrightarrow{AB}) \subset \overleftrightarrow{f(A)\,f(B)}$.

Sea $P \in f(\overleftrightarrow{AB}) \Leftrightarrow P = f(Q), Q \in \overleftrightarrow{AB}$.

Si $Q = A$ entonces $P = f(A) \in \overleftrightarrow{f(A)\,f(B)}$, y de la misma forma si $Q = B$.

Si $Q \neq A, B$ entonces se debe dar uno de los tres casos $Q * A * B$, $A * Q * B$ o $A * B * Q$.

Si $Q * A * B$, aplicando la proposición anterior $f(Q) * f(A) * f(B)$ y por tanto $P = f(Q) \in \overleftrightarrow{f(A)\,f(B)}$ por el axioma B1.

De la misma manera se demuestran los otros dos casos.

La inclusión contraria $\overleftrightarrow{f(A)\,f(B)} \subset f(\overleftrightarrow{AB})$ se demuestra de forma similar.

11.1.5 Corolario.

Las isometrías conservan la incidencia:

$$P \in r \Leftrightarrow f(P) \in f(r)$$

Demostración.
Es una aplicación directa de la proposición anterior.

11.1.6 Proposición.
Las isometrías conservan la congruencia de ángulos:

$$\angle ABC \cong \angle f(A) f(B) f(C)$$

Demostración.
Consideremos los triángulos ΔABC y $\Delta f(A) f(B) f(C)$.
$\left|\overline{f(A) f(B)}\right| = |AB|$ por ser f una isometría y por tanto $\overline{f(A) f(B)} \cong \overline{AB}$.
Y de la misma forma $\overline{f(A) f(C)} \cong \overline{AC}$ y $\overline{f(B) f(C)} \cong \overline{BC}$.
Luego, por el criterio SSS de congruencia de triángulos, $\Delta ABC \cong \Delta f(A) f(B) f(C)$.
Y por tanto $\angle ABC \cong \angle f(A) f(B) f(C)$.

11.1.7 Corolario.

$$\angle ABC \cong \angle DEF \Rightarrow \angle f(A) f(B) f(C) \cong \angle f(D) f(E) f(F)$$

Demostración.
$\angle f(A) f(B) f(C) \cong \angle ABC \cong \angle DEF \cong \angle f(D) f(E) f(F)$.

11.1.8 Proposición.
Si f es una isometría, su función inversa f^{-1} también es una isometría.

Demostración.
$A = f(A')$ y $B = f(B')$ para ciertos puntos $A' = f^{-1}(A)$ y $B' = f^{-1}(B)$.
Luego $\left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{f(A') f(B')}\right| = \left|\overline{A'B'}\right| = \left|\overline{f^{-1}(A') f^{-1}(B')}\right|$, como queríamos ver.

11.1.9 Proposición.
La composición de dos isometrías es una isometría.

Demostración.
Sean f y g dos isometrías. Claramente la composición de dos biyecciones es una biyección. Y además, las longitudes quedan invariantes:
$\left|\overline{f(g(A)) f(g(B))}\right| = \left|\overline{g(A) g(B)}\right| = \left|\overline{AB}\right|$.

11.1.10 Proposición.
La función identidad

$$Id : \Omega \to \Omega$$
$$A \mapsto A$$

Es una isometría.

Demostración.

Claramente es una biyección y conserva las distancias: $\left|\overline{f(A)f(B)}\right| = \left|\overline{AB}\right|$.

11.1.11 Corolario.
El conjunto de isometrías tiene estructura de grupo.

11.1.12 Definición. Punto fijo de una isometría.
Diremos que $P \in IE$ es un punto fijo para la isometría $f : IE \to IE$ cuando $f(P) = P$.

11.1.13 Proposición.
Si una isometría deja fijos dos puntos de una recta, toda la recta es de puntos fijos.

Demostración.
Sea una isometría $f : IE \to IE$ y supongamos que $A, B \in IE$ puntos fijos.
Sea $C \in \overleftrightarrow{AB}$. Queremos ver que $f(C) = C$.
Se pueden dar tres casos: $C * A * B$, $A * C * B$ o $A * B * C$ (axioma B3). Lo probaremos para el caso $A * C * B$, los otros dos casos se demuestran de forma similar.
Supongamos pues que $A * C * B$. Sabemos que las isometrías mantienen el orden y transforman rectas en rectas, por lo tanto $A * f(C) * B$.
Se cumple $\left|\overline{AC}\right| = \left|\overline{f(A)f(C)}\right| = \left|\overline{Af(C)}\right|$, y por tanto $C = f(C)$, pues C es el único punto de la semirrecta $\overrightarrow{AB}$ a dicha distancia de A.

11.1.14 Proposición.
La identidad es la única isometría que deja fijos tres puntos no colineales.

Demostración.
Sean $A, B, C \in IE$ tres puntos no colineales y supongamos que son puntos fijos para la isometría $f : IE \to IE$. Claramente la Identidad cumple esta condición, veamos que es la única isometría posible con dicha condición.
Puesto que deja fijos los tres puntos A, B y C, por la proposición anterior serán de puntos fijos las rectas que éstos determinan: $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{BC}$.
Sea $P \in IE$. Si P pertenece a una de estas tres rectas anteriores, entonces es fijo.
Supongamos lo contrario. Sea Q un punto cualquiera $A * Q * B$ (axioma B2) y consideremos la recta $\overleftrightarrow{PQ}$.
Por el Teorema de Pasch esta recta pasará por $\overline{AC}$ o por $\overline{BC}$, con lo cual contendrá un segundo punto fijo, y por la proposición anterior, será una recta de puntos fijos. Puesto que P pertenece a esta recta, también será fijo, tal y como queríamos ver.

11.1.15 Proposición.
Supongamos que dos isometrías $f, g : IE \to IE$ coinciden en tres puntos no colineales: $f(A) = g(A)$, $f(B) = g(B)$ y $f(C) = g(C)$. Entonces $f = g$.

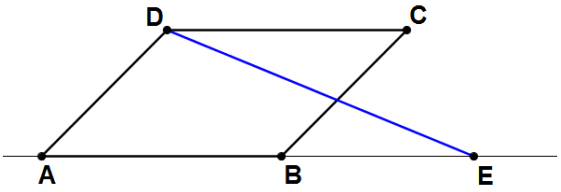
Demostración.
Consideremos la isometría $f^{-1} \circ g$ (ya hemos demostrado anteriormente que es una isometría).

$(f^{-1} \circ g)(A) = f^{-1}(g(A)) = f^{-1}(f(A)) = A$ y de la misma forma $(f^{-1} \circ g)(B) = B$ y $(f^{-1} \circ g)(C) = C$. En consecuencia, y por la proposición anterior, $f^{-1} \circ g = Id$ y por lo tanto f^{-1} es la inversa de f y g a la vez, y esto sólo puede suceder si $f = g$, pues una función queda totalmente determinada por su función inversa.

11.2 Translaciones.

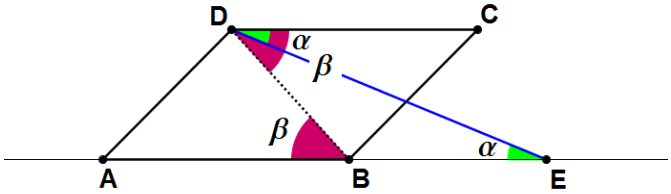
11.2.1 Lema.

Sea $\Diamond ABCD$ un paralelogramo y $A*B*E$. Entonces $C \underset{DE}{\not\approx} B$.



Demostración.

Sean $\alpha = \angle BED$ y $\beta = \angle ABD$.



Puesto que $A*B*E$, $|\alpha| < |\beta|$. (????)

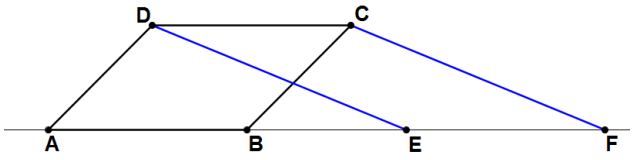
Puesto que $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$, $\alpha \cong \angle EDC$ y $\beta \cong \angle BDC$ (5.3.5)

Luego $|\angle EDC| < |\angle BDC|$ y por tanto $\angle EDC < \angle BDC$.

Así pues, $E \in Int(\angle BDC)$ y por el Teorema Crossbar (2.6.3) se deduce que $\overrightarrow{DE}$ corta el segmento $\overline{BC}$. Así pues, $C \underset{DE}{\not\approx} B$.

11.2.2 Lema.

Sea $\Diamond ABCD$ un paralelogramo y $A*B*E$. Sea $F \in \overleftrightarrow{AB}$ tal que $\overleftrightarrow{CF} // \overleftrightarrow{DE}$.
Entonces $B*E*F$, y por tanto $A*B*E*F$.



Por el lema anterior sabemos que $C \underset{DE}{\not\approx} B$.

Si $F \in \overrightarrow{EB}$ entonces $F \underset{DE}{\approx} B$ y por tanto $F \underset{DE}{\not\approx} C$, luego $\overline{FC} \cap \overleftrightarrow{DE} \neq \varnothing$ y por tanto $\overleftrightarrow{FC} \cap \overleftrightarrow{DE} \neq \varnothing$ contradiciendo la hipótesis $\overleftrightarrow{CF} // \overleftrightarrow{DE}$.

Así pues, $F \in op(\overrightarrow{EB}) \Rightarrow B*E*F$.

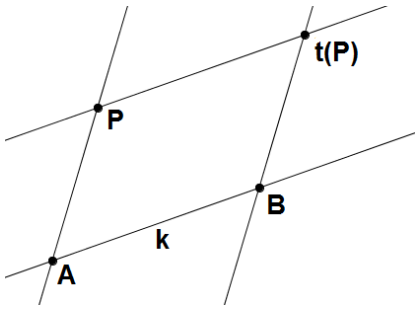
11.2.3 Definición. Translación.

Sea una semirrecta $\overrightarrow{AB}$ y un número real $k > 0$. Definimos la translación asociada a $\overrightarrow{AB}$ y k de la siguiente manera:

Antes de nada, reasignamos el punto B de forma que $\left|\overline{AB}\right| = k$.

Primera parte: Para cualquier punto $P \notin \overleftrightarrow{AB}$:

Trazamos la paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ por P y la paralela a $\overleftrightarrow{AP}$ por B. $t(P)$ será el punto de intersección de estas rectas.

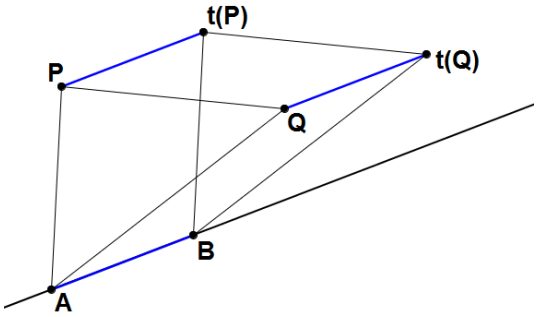


Veamos que esta función, así definida, es una isometría:

Sean $P, Q \notin \overleftrightarrow{AB}$. Queremos ver que $\left|\overline{PQ}\right| = \left|\overline{t(P)t(Q)}\right|$.

Hemos construido dos paralelogramos: $\Diamond ABt(P)P$ y $\Diamond ABt(Q)Q$.

Los lados opuestos de los paralelogramos son congruentes, por lo tanto $Pt(P) \cong AB$ y $Qt(Q) \cong AB$, luego $Pt(P) \cong Qt(Q)$.



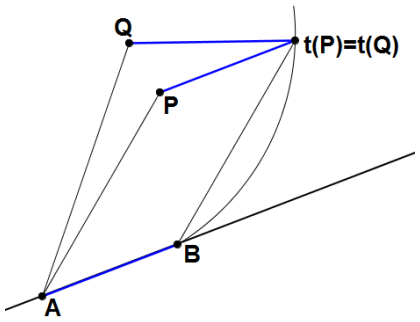
Por otro lado, $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{Pt(P)}$ y $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{Qt(Q)}$, y por tanto $\overleftrightarrow{Pt(P)} // \overleftrightarrow{Qt(Q)}$.

Así pues, $\Diamond PQt(Q)t(P)$ es un paralelogramo, pues tiene dos lados opuestos paralelos y congruentes (6.1.5), luego los otros dos lados son también congruentes (6.1.2b): $\overline{PQ} \cong \overline{t(P)t(Q)}$, y por tanto $\left|\overline{PQ}\right| \cong \left|\overline{t(P)t(Q)}\right|$.

Observación: La demostración anterior no es válida cuando $\overleftrightarrow{QP} // \overleftrightarrow{AB}$ y debemos construir un razonamiento específico para este caso, en el que tendremos que tener en cuenta el orden de los puntos.

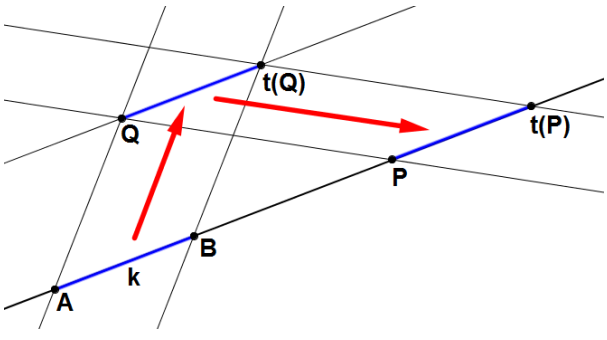
Esta función es inyectiva en $IE - \left\{\overleftrightarrow{AB}\right\}$:

Sean $P,Q \in IE - \{\overleftrightarrow{AB}\}$. Supongamos que $t(P) = t(Q)$.
$\overleftrightarrow{Qt(Q)} // \overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{Pt(P)} // \overleftrightarrow{AB}$ por construcción, luego $\overleftrightarrow{Qt(Q)} // \overleftrightarrow{Pt(P)}$, y puesto que tienen un punto en común se deduce que $\overleftrightarrow{Qt(Q)} = \overleftrightarrow{Pt(P)}$.
De la misma manera, $\overleftrightarrow{AQ} // \overleftrightarrow{Bt(Q)}$ y $\overleftrightarrow{AP} // \overleftrightarrow{Bt(P)}$, y puesto que $t(P) = t(Q)$, $\overleftrightarrow{AQ} // \overleftrightarrow{AP}$, y puesto que tienen el punto A en común, $\overleftrightarrow{AQ} = \overleftrightarrow{AP}$.
Por último $Q = \overleftrightarrow{AQ} \cap \overleftrightarrow{Qt(Q)} = \overleftrightarrow{AP} \cap \overleftrightarrow{Pt(P)} = P$, es decir, $Q = P$.

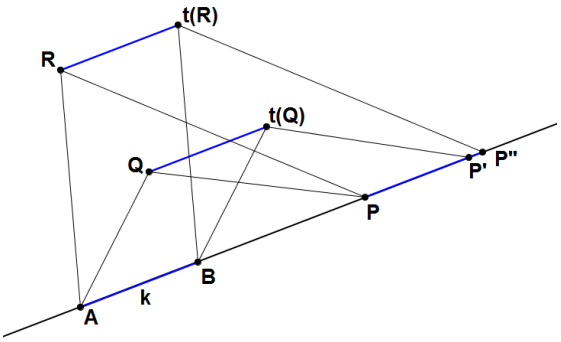


Esta función es suprayectiva en $IE - \{\overleftrightarrow{AB}\}$:
Sea $Q \in IE - \{\overleftrightarrow{AB}\}$ un punto cualquiera. Queremos ver que existe un $P \in IE - \{\overleftrightarrow{AB}\}$ tal que $t(P) = Q$.
Tomamos un punto auxiliar $R \in IE - \{\overleftrightarrow{AB}\}$, $R \neq Q$. Si $t(R) = Q$ ya hemos acabado. Si no, sea r la recta paralela a $\overleftrightarrow{Rt(R)}$ que pasa por Q y sea s la recta paralela a $\overleftrightarrow{t(R)Q}$ que pasa por R. Sea $P = r \cap s$. Para ver que $t(P) = Q$ sólo hace falta aplicar el lema anterior.

Segunda parte: Si $P \in \overleftrightarrow{AB}$.
Tomamos un punto cualquiera $Q \notin \overleftrightarrow{AB}$ y calculamos $t(Q)$ de la manera anterior. Y por paralelismo sobre $\overleftrightarrow{Qt(Q)}$ calculamos $t(P)$:



Esta construcción no depende del punto Q escogido. En efecto,



Supongamos que, dado un punto cualquiera $Q \notin \overleftrightarrow{AB}$, obtenemos mediante el proceso anterior el punto P', y tomamos otro punto cualquiera $R \notin \overleftrightarrow{AB}$ mediante el cual, por el mismo proceso, obtenemos el punto P''.

Por el lema 2 anterior, tendremos $P', P'' \in \overrightarrow{BP}$ y $|BP'| = |BP''|$, y por tanto $P' = P''$.

11.3 Rotaciones.

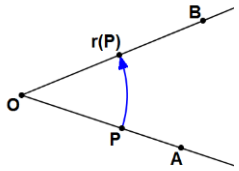
11.3.1. Definición. Rotación.

Definimos una rotación en el plano euclídeo de la siguiente manera:

Sean dos semirrectas $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ compartiendo el mismo extremo O.

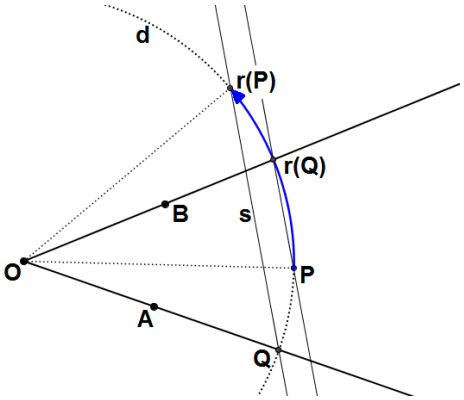
Definimos $r(O)=O$.

Para cualquier $P\in\overrightarrow{OA},\ P\neq O$, definimos $r(P)$ como el único punto $Q\in\overrightarrow{OB}$ tal que $\left|\overline{OQ}\right|=\left|\overline{OP}\right|$:



Si $P\notin\overrightarrow{OA}$, localizamos el punto $Q\in\overrightarrow{OA}$ tal que $\left|\overline{OQ}\right|=\left|\overline{OP}\right|$. Calculamos $r(Q)$ de la manera anteriormente descrita. Los puntos P, Q y $r(Q)$ están a la misma distancia de O. Sea d la circunferencia de centro O y radio $\left|\overline{OP}\right|$.

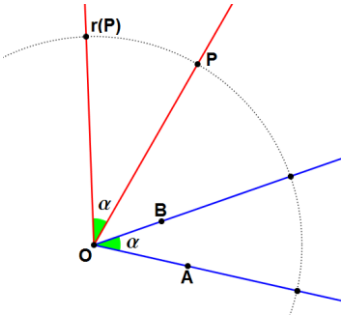
Determinamos la única recta s que pasa por Q y es paralela a $\overleftrightarrow{Pr(Q)}$. Esta recta s y la circunferencia d tendrán dos puntos en común, uno de ellos es Q. Definimos $r(P)$ como el otro punto de intersección.



11.3.2 Proposición.

En una rotación determinada por las semirrectas $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$, el ángulo formado por un punto diferente del origen y su imagen es siempre constante e igual al ángulo entre $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$:

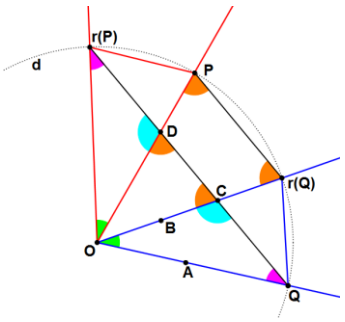
$$\left|\angle POr(P)\right|=\left|\angle AOB\right|$$



Demostración.

Si $P \in \overrightarrow{OA}$ no hay nada que demostrar. Supongamos que $P \notin \overrightarrow{OA}$. Debemos considerar tres casos independientes: Cuando P está en el interior de $\angle AOB$, cuando está en $\angle AOB$ y cuando está en el exterior de $\angle AOB$. Aquí veremos el tercer caso.

Sea $C = \overrightarrow{Or(Q)} \cap \overleftrightarrow{Qr(P)}$ y $D = \overrightarrow{OP} \cap \overleftrightarrow{Qr(P)}$.



$\overline{OQ} \cong \overline{Or(P)}$, luego $\Delta OQr(P)$ es un triángulo isósceles en O, y por tanto $\angle OQr(P) \cong \angle Or(P)Q$.

De la misma forma, $\overline{Or(Q)} \cong \overline{OP}$, luego $\Delta O\Pr(Q)$ es un triángulo isósceles en O, y por tanto $\angle Or(Q)P \cong \angle O\Pr(Q)$.

Por paralelismo, $\angle Or(Q)P \cong \angle OCD$, y $\angle O\Pr(Q) \cong \angle ODC$, y por tanto $\angle ODC \cong \angle OCD$.

Luego sus complementarios también son congruentes: $\angle ODr(P) \cong \angle OCQ$.

Aplicando el criterio AA, deducimos que los triángulos ΔOQC y $\Delta Or(P)D$ son semejantes, y por tanto $\angle AOB = \angle QOC \cong \angle DOr(P) = \angle POr(P)$.

11.3.3 Proposición.

Las rotaciones conservan las distancias.

Demostración.

Sea r una rotación de centro O. Sean $P, Q \in IE$ dos puntos cualquiera del plano y sean $P' = r(P)$ y $Q' = r(Q)$.

Supongamos el caso general en que P, Q y O son tres puntos no alineados (los otros casos quedan como ejercicio).

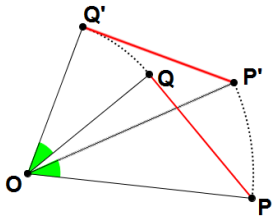
Sabemos, por la construcción de la rotación, que $\left|\overline{OP}\right| = \left|\overline{OP'}\right|$ y $\left|\overline{OQ}\right| = \left|\overline{OQ'}\right|$.

Demostraremos que $\left|\angle POQ\right| = \left|\angle P'OQ'\right|$ con lo que aplicando el criterio SAS de congruencia de triángulos deduciremos que ΔPOQ y $\Delta P'OQ'$ son congruentes, y por tanto, en particular, $\left|\overline{PQ}\right| = \left|\overline{P'Q'}\right|$.

Por la proposición anterior, sabemos que $|\angle POP'| = |\angle QOQ'|$

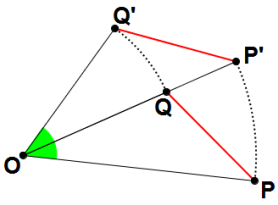
Hay que estudiar tres casos por separado:

Primer caso: Q no está en el interior del ángulo $\angle POQ$:



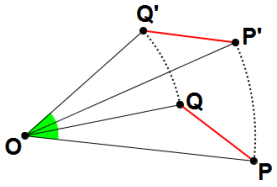
$$|\angle POQ| = |\angle POP'| + |\angle P'OQ| = |\angle QOQ'| + |\angle P'OQ| = |\angle P'OQ'|$$

Segundo caso: Q está en la semirrecta $\overrightarrow{OP'}$:



$$|\angle POQ| = |\angle POP'| = |\angle QOQ'| = |\angle P'OQ'|$$

Tercer caso: Q está en el interior del ángulo $\angle POQ$:

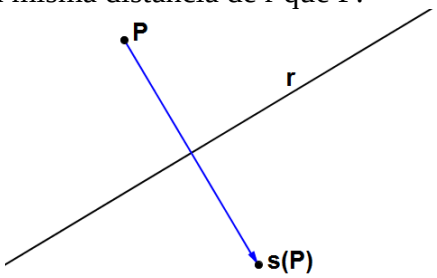


$$|\angle POQ| = |\angle POP'| - |\angle P'OQ| = |\angle QOQ'| - |\angle P'OQ| = |\angle P'OQ'|$$

11.4 Simetrías.

11.4.1 Definición. Simetría.

Sea r una recta del plano. Definimos la simetría con eje r de la siguiente manera:
Si $P \in r$, $s(P) = P$.
Si $P \notin r$, trazamos la única perpendicular s a r por P. Sea $s(P)$ el único punto de s al otro lado de r que está a la misma distancia de r que P.



11.5 Dilataciones.

11.5.1 Definición. Dilatación.

Dado un número $k > 0$ y un punto O, la dilatación de factor k y centro O es la función $d : IE \to IE$ definida de la siguiente manera:

$d(O) = O$, y si $P \neq O$, $d(O)$ es el único punto de la semirrecta $\overrightarrow{OP}$ tal que

$$\left|\overline{Od(P)}\right| = k\left|\overline{OP}\right|$$

Claramente, si $k = 1$ se trata de la identidad. **Las dilataciones no son isometrías**, como veremos a continuación.

11.5.2 Proposición.

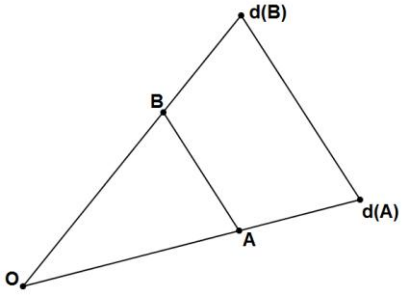
Si $d : IE \to IE$ es una dilatación de factor k, entonces

$$\left|\overline{d(A)d(B)}\right| = k\left|\overline{AB}\right|$$

Demostración.

Supongamos que los puntos O, A y B no están alineados.

Los triángulos ΔAOB y $\Delta d(A)Od(B)$ son semejantes, pues $\angle AOB = \angle d(A)Od(B)$ y $\dfrac{Od(A)}{OA} = \dfrac{Od(B)}{OB} = k$



Por lo tanto tienen el tercer lado proporcional, es decir, $k = \dfrac{d(A)d(B)}{AB}$, tal y como queríamos ver.

Si los puntos O, A y B están alineados, no podemos utilizar el razonamiento anterior.

Supongamos que $A * O * B$. Entonces también $d(A) * O * d(B)$, y por tanto

$$\left|\overline{d(A)d(B)}\right| = \left|\overline{d(A)O}\right| + \left|\overline{Od(B)}\right| = k\left|\overline{AO}\right| + k\left|\overline{OB}\right| = k\left(\left|\overline{AO}\right| + k\left|\overline{OB}\right|\right) = k\left|\overline{AB}\right|$$

Los otros casos se demuestran de forma similar.

11.5.3 Corolario.

Si dos segmentos son congruentes, sus imágenes por una dilatación también serán congruentes.

Demostración.

Supongamos que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, entonces $\left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{CD}\right|$.

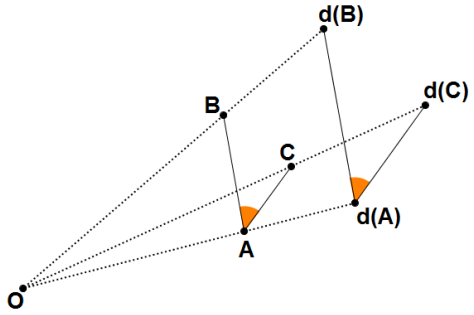
Por el corolario anterior, $\left|\overline{d(A)d(B)}\right| = k\left|\overline{AB}\right|$ y $\left|\overline{d(C)d(D)}\right| = k\left|\overline{CD}\right|$, luego

$\left|\overline{d(A)d(B)}\right| = k\left|\overline{AB}\right| = k\left|\overline{CD}\right| = \left|\overline{d(C)d(D)}\right| \Rightarrow \overline{d(A)d(B)} \cong \overline{d(C)d(D)}$.

11.5.4 Corolario.
Un triángulo y su imagen por una dilatación son triángulos semejantes.

Demostración.
Por la proposición anterior sabemos que
$\left|\overline{d(A)d(B)}\right| = k\left|\overline{AB}\right|$, $\left|\overline{d(A)d(C)}\right| = k\left|\overline{AC}\right|$ y $\left|\overline{d(B)d(C)}\right| = k\left|\overline{BC}\right|$
y sólo hay que aplicar el criterio SSS de semejanza de triángulos.

11.5.5 Corolario.
Un ángulo y su imagen por una dilatación son ángulos congruentes.



Demostración.
Completando los triángulos ΔABC y $\Delta d(A)d(B)d(C)$, en el corolario anterior hemos visto que son semejantes, luego en particular $\angle BAC \cong \angle d(B)d(A)d(C)$.

11.5.6 Corolario.
Si dos ángulos son congruentes, sus imágenes por una dilatación también serán congruentes.

Demostración.
Basta aplicar el corolario anterior.

12 Sistemas axiomáticos.

12.1 Recopilatorio de axiomas de la geometría euclídea.

Axiomas de incidencia:

I1. Si A y B son dos puntos diferentes, existe una única recta r tal que $A \in r$ y $B \in r$.

I2. En toda recta hay al menos dos puntos diferentes.

I3. Existirán tres puntos A, B y C diferentes que no están contenidos en la misma recta, es decir, que si r es una recta, al menos uno de ellos no pertenece a r.

Axiomas de orden:

B1. Si A*B*C entonces:

a) C*B*A.

b) Los puntos A, B y C están en una misma recta.

c) A, B y C son puntos diferentes.

B2. Si $A \neq B$, entonces existirán puntos C, D y E tales que C*A*B, A*D*B y A*E*E .

B3. Supongamos que A, B y C son puntos diferentes de una misma recta r. Entonces será cierta una y sólo una de las siguientes afirmaciones:

(a) A*B*C, (b) B*A*C, (c) A*C*B

B4. Si r es una recta, y P, Q y R puntos que no pertenecen a r. Entonces:

a) $P \approx_r Q$ y $Q \approx_r R$ entonces $P \approx_r R$, es decir, la relación $P \approx_r Q$ es transitiva.

b) $P \not\approx_r Q$ y $Q \not\approx_r R$ entonces $P \approx_r R$.

Axiomas de congruencia.

C1. La relación de congruencia entre segmentos es una relación de equivalencia, es decir, cumple las propiedades:

a) simétrica: $\overline{AB} \cong \overline{A'B'} \Rightarrow \overline{A'B'} \cong \overline{AB}$

b) reflexiva: $\overline{AB} \cong \overline{AB}$

c) transitiva: $\overline{AB} \cong \overline{A'B'} \wedge \overline{AB} \cong \overline{A''B''} \Rightarrow \overline{A'B'} \cong \overline{A''B''}$

C2. Sea $\overline{AB}$ un segmento y $\overrightarrow{CD}$ una semirrecta. Entonces existe un único punto $E \in \overrightarrow{CD}$ tal que $\overline{AB} \cong \overline{CE}$.

C3. Si $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ y C es un punto (único a posteriori) tal que A*C*B, entonces existirá un punto C' tal que A'*C'*B' y $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ y $\overline{CB} \cong \overline{C'B'}$.

C4. La relación de congruencia entre ángulos es una relación de equivalencia, es decir, cumple las propiedades:.

a) simétrica: $\angle BAC \cong \angle B'A'C' \Rightarrow \angle B'A'C' \cong \angle BAC$

b) reflexiva: $\angle BAC \cong \angle BAC$

c) transitiva: $\angle BAC \cong \angle B'A'C' \wedge \angle B'A'C' \cong \angle B''A''C'' \Rightarrow \angle BAC \cong \angle B''A''C''$

C5. Sea $\angle BAC$ un ángulo y $\overrightarrow{DE}$ una semirrecta. Entonces en cualquiera de los dos lados de $\overrightarrow{DE}$ existirá una única semirrecta $\overrightarrow{DF}$ tal que $\angle BAC \cong \angle EDF$.

C6. Sea ABC un triángulo y $\overline{A'B'}$ un segmento tal que $\overline{A'B'} \cong \overline{AB}$. Entonces en cada uno de los lados de $\overleftarrow{A'B'}$ existirá un punto C' tal que $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

Axiomas de continuidad.

Axioma de Dedekind: Toda cortadura de Dedekind de una recta contiene un punto de corte.

Axioma de Arquímedes. Sean los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{EF}$. Entonces existirá un entero positivo n tal que $n\overline{EF} > \overline{AB}$.

Axioma de paralelismo.

PUP. Dada una recta r y un punto P que no pertenece a r, existirá una única recta s por P paralela a r.

12.2 Fundamentos de la Geometría de Hilbert.

El 17 de junio de 1899 David Hilbert (1862-1943) publicó un breve trabajo dedicado a los fundamentos de la geometría, que formó parte de un volumen celebratorio (*Festschrift*) en ocasión de la inauguración en Göttingen de un monumento en homenaje a Carl Friedrich Gauss (1777-1855) y Wilhem Weber (1804-1891). La monografía llevó el nombre Fundamentos de la geometría (Hilbert, 1899) y es considerada actualmente no sólo como una de sus contribuciones más importantes a los fundamentos de la matemática, sino también como un hito fundamental de la concepción moderna o abstracta del método axiomático. Hilbert presentó allí el primer sistema axiomático formal para la geometría euclídea elemental, a través del cual era posible desarrollar esa teoría matemática de un modo riguroso y sistemático.

12.2.1 El sistema axiomático de Hilbert.

Grupo I. Axiomas de incidencia.

H1.1 Todo par de puntos diferentes A y B determinan una única recta $\overleftrightarrow{AB}$.

H1.2 Toda recta queda determinada por dos puntos de la misma. Si $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC}$ con $B \neq C$, entonces $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{BC}$.

H1.3 Tres puntos no colineales determinan un único plano.

H1.4 Todo plano queda determinado por cualquier conjunto de tres puntos no colineales del mismo.

H1.5 Si dos puntos A y B pertenecen a un plano, entonces todos los puntos de la recta $\overleftrightarrow{AB}$ pertenecen a dicho plano.

H1.6 Si dos planos tienen un punto en común, tendrán como mínimo otro punto más en común.

H1.7 a) Toda recta tiene al menos dos puntos.
b) En cada plano existen al menos tres puntos no colineales.
c) En el espacio existen al menos cuatro puntos no coplanarios.

Grupo II. Axiomas de orden.

H2.1 Si A, B y C son tres puntos de una recta y $A*B*C$, entonces también $C*B*A$.

H2.2 Si $A \neq B$, entonces existirá un punto C tal que $A*C*B$ y un punto D tal que $A*B*D$.

H2.3 Dados tres puntos colineales, sólo uno de ellos puede estar entre los otros dos.

H2.4 Dados cuatro puntos A, B, C y D colineales, siempre los podemos ordenar de forma que $A*B*C$, $A*B*D$, $A*C*D$ y $B*C*D$.

H2.5 Dados tres puntos no colineales A, B y C, y una recta del plano ABC que no toque ninguno de los tres, si la recta pasa por un punto del segmento AB también pasará por el segmento BC o el segmento AC.

Grupo III. Axioma de las paralelas.

H3.1 Dado un plano conteniendo una recta y un punto externo a la misma, existirá en el plano una única recta paralela a la misma que pase por dicho punto.

Grupo IV. Axiomas de congruencia.

H4.1 a) Dados dos puntos A y B de una recta r, para cualquier otra recta s (o la misma) y para cualquier punto A' de s, existirá un único punto B' en cada uno de los lados de A' en s tal que $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$.
b) Todo segmento es congruente consigo mismo.

H4.2 Si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{CD} \cong \overline{EF}$ entonces $\overline{AB} \cong \overline{EF}$.

H4.3 Dados dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ de una misma recta, cuyo único punto en común sea B, y otros dos segmentos $\overline{A'B'}$ y $\overline{B'C'}$ de otra o la misma recta, cuyo único punto en común sea B', si $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ y $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, entonces $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$.

H4.4 a) Dado un ángulo (h,k) contenido en un plano π, una recta r contenida en cualquier otro plano π', y un punto A de r, determinado uno de los dos lados de r en π', y uno de los dos lados h' de r respecto de A, existirá una única semirrecta k' tal que $(h,k) \cong (h',k')$.
b) Todo ángulo es congruente consigo mismo.

H4.5 Si $(h,k) \cong (h',k')$ y $(h',k') \cong (h'',k'')$ entonces $(h,k) \cong (h'',k'')$ (propiedad transitiva de la congruencia de ángulos).

H4.6 Dados dos triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$, si $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$ y $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ entonces se cumple $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ y $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$ (Criterio SAS de congruencia de triángulos).

Grupo V. Axioma de continuidad.

H5.1 Dados tres puntos colineales $A * B_1 * C$, determinamos la serie de puntos $B_2, B_3, B_4 \ldots$ tales que $B_i * B_{i+1} * B_{i+2}$ y $\overline{B_{i+1}B_i} \cong \overline{AB_1}$ para todo i, existirá un k tal que $A * C * B_k$. (Axioma de Arquímedes)

Axioma de completitud. ("Vollständigkeit")

Este sistema de axiomas no se puede ampliar, es decir, no se pueden añadir más elementos de forma que se genere una geometría significativamente diferente.

12.2.2 Análisis de los axiomas de Hilbert.

Grupo I. Axiomas de incidencia.
H1.1 = I1
H1.2
H1.3
H1.4
H1.5
H1.6
H1.7

Grupo II. Axiomas de orden.
H2.1
H2.2
H2.3
H2.4
H2.5

Grupo III. Axioma de las paralelas.

H3.1

Grupo IV. Axiomas de congruencia.
H4.1 a)
b)

H4.2
H4.3
H4.4 a)
b)

H4.5
H4.6

Grupo V. Axioma de continuidad.
H5.1 = Axioma de Arquímedes.

Axioma de completitud. ("Vollständigkeit")

12.3 Los Elementos de Euclides.

Libro 1. Fundamentos de geometría plana relacionados con segmentos.

1.1 Construcción de un triángulo equilátero sobre un segmento dado. → 3.2.15
1.2 Construcción de un segmento que sea congruente a uno dado y que tenga como extremo un punto dado.
1.3 Quitar a un segmento mayor uno menor.
1.4 Criterio SAS de congruencia de triángulos. → 2.1.10
1.5 Los ángulos de un triángulo isósceles son congruentes. → 2.1.12
1.6 Un triángulo con dos ángulos congruentes es isósceles. → 2.8.3
1.7
1.8 Criterio SSS de congruencia de triángulos. → 2.8.4
1.9 Construcción de la bisectriz de un ángulo. → 2.9.7
1.10 Construcción del punto medio de un segmento. → 2.9.5
1.11 Construcción de la perpendicular por un punto de un segmento. → 2.5.7
1.12 Construcción de la perpendicular por un punto fuera de un segmento. → 2.5.5
1.13 Los ángulos suplementarios equivalen a dos rectos → 3.5.2
1.14 Si dos ángulos suman dos rectos, los puntos de la base están alineados. → 2.3.4
1.15 Los ángulos opuestos por el vértice son iguales. → 2.3.3
1.16 El ángulo exterior en un vértice de un triángulo es mayor que los ángulos internos opuestos. →2.7.1
1.17 La suma de dos ángulos de un triángulo es siempre menor que dos rectos →
1.18 El ángulo mayor de un triángulo es el opuesto al lado mayor. → 2.7.6
1.19 El lado mayor de un triángulo es el opuesto al ángulo mayor → 2.7.6
1.20 Desigualdad triangular → 3.4.16
1.21 Un punto interior de un triángulo determina un ángulo mayor.
1.22 Construcción de un triángulo dados tres segmentos.
1.23 Construcción de un ángulo sobre un segmento dado. → Axioma C5.
1.24 Si un triángulo tiene un ángulo mayor, entonces también tendrá el lado mayor. → 2.7.9
1.25 Si un triángulo tiene un lado mayor, entonces también tendrá el ángulo mayor. → 2.7.9
1.26 Criterio ASA de congruencia de triángulos. → 2.8.2
1.27 Dos rectas generando ángulos alternos iguales son paralelas. → 2.6.1
1.28 Una recta que corta a dos rectas paralelas genera ángulo iguales.
1.29
1.30 Transitividad del paralelismo de rectas.→ 4.3.11
1.31 Construcción de una recta paralela a una dada por un punto exterior → 2.6.4
1.32 El ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos internos opuestos. Los tres ángulos internos de un triángulo suman dos rectos. → 4.3.14
1.33 Los extremos de segmentos paralelos determinan segmentos paralelos y congruentes.
1.34 En un paralelogramo la diagonal determina dos triángulos iguales. → 5.7.2
1.35 Paralelogramos entre dos rectas paralelas y con la misma base tienen la misma área.
1.36 Paralelogramos entre dos rectas paralelas y con bases congruentes tienen la misma área.
1.38 Triángulos entre dos rectas paralelas y con bases congruentes tienen la misma área.
1.39 Triángulos con la misma base y la misma área están entre dos rectas paralelas.
1.40

1.41 Un paralelogramo con la misma base que un triángulo y entre las mismas paralelas tiene el doble de área.

1.42 Construcción de un paralelogramo con el mismo área y el mismo ángulo que un triángulo dado.
1.43 Las figuras complementarias en el interior de un paralelogramo son iguales.
1.44 Construcción de un paralelogramo con la misma área que un triángulo dado.
1.45 Construcción de un paralelogramo con la misma área que una figura dada.
1.46 Construcción de un cuadrado sobre un segmento dado.
1.47 Teorema de Pitágoras. → 4.6.3
1.48 Recíproco del Teorema de Pitágoras. → 4.6.4

12.4 SMSG Axioms for Euclidean Geometry.

Introductory Note. The School Mathematics Study Group (SMSG) developed an axiomatic system designed for use in high school geometry courses. The axioms are not independent of each other, but the system does satisfy all the requirements for Euclidean geometry; that is, all the theorems in Euclidean geometry can be derived from the system. The lack of independence of the axiomatic system allows high school students to more quickly study a broader range of topics without becoming trapped in detailed study of obvious concepts or difficult proofs. You should compare the similarity and differences between the SMSG axioms and those by Hilbert and Birkhoff.
Undefined Terms: point, line, and plane

Postulate 1. (Line Uniqueness) Given any two distinct points there is exactly one line that contains them.

Postulate 2. (Distance Postulate) To every pair of distinct points there corresponds a unique positive number. This number is called the distance between the two points.

Postulate 3. (Ruler Postulate) The points of a line can be placed in a correspondence with the real numbers such that:
a) To every point of the line there corresponds exactly one real number.
b) To every real number there corresponds exactly one point of the line.
c) The distance between two distinct points is the absolute value of the difference of the corresponding real numbers.

Postulate 4. (Ruler Placement Postulate) Given two points P and Q of a line, the coordinate system can be chosen in such a way that the coordinate of P is zero and the coordinate of Q is positive.

Postulate 5. (Existence of Points)
a) Every plane contains at least three non-collinear points.
b) Space contains at least four non-coplanar points.

Postulate 6. (Points on a Line Lie in a Plane) If two points lie in a plane, then the line containing these points lies in the same plane.

Postulate 7. (Plane Uniqueness) Any three points lie in at least one plane, and any three non-collinear points lie in exactly one plane.

Postulate 8. (Plane Intersection) If two planes intersect, then that intersection is a line.

Postulate 9. (Plane Separation Postulate) Given a line and a plane containing it, the points of the plane that do not lie on the line form two sets such that:
a) each of the sets is convex;
b) if P is in one set and Q is in the other, then segment PQ intersects the line.

Postulate 10. (Space Separation Postulate) The points of space that do not lie in a given plane form two sets such that:
a) Each of the sets is convex.
b) If P is in one set and Q is in the other, then segment PQ intersects the plane.

Postulate 11. (Angle Measurement Postulate) To every angle there corresponds a real number between 0° and 180°.

Postulate 12. (Angle Construction Postulate) Let $\overrightarrow{AB}$ be a ray on the edge of the half-plane H. For every r between 0° and 180°, there is exactly one ray with P in H such that $m(\angle PAB)=r$.

Postulate 13. (Angle Addition Postulate) If D is a point in the interior of $\angle BAC$, then $m\angle BAC=,\angle BAD+m\angle DAC$.

Postulate 14. (Supplement Postulate) If two angles form a linear pair, then they are supplementary.

Postulate 15. (SAS Postulate) Given a one-to-one correspondence between two triangles (or between a triangle and itself). If two sides and the included angle of the first triangle are congruent to the corresponding parts of the second triangle, then the correspondence is a congruence.

Postulate 16. (Parallel Postulate) Through a given external point there is at most one line parallel to a given line.

Postulate 17. (Area of Polygonal Region) To every polygonal region there corresponds a unique positive real number called the area.

Postulate 18. (Area of Congruent Triangles) If two triangles are congruent, then the triangular regions have the same area.

Postulate 19. (Summation of Areas of Regions) Suppose that the region R is the union of two regions R1 and R2. If R1 and R2 intersect at most in a finite number of segments and points, then the area of R is the sum of the areas of R1 and R2.

Postulate 20. (Area of a Rectangle) The area of a rectangle is the product of the length of its base and the length of its altitude.

Postulate 21. (Volume of Rectangular Parallelpiped) The volume of a rectangular parallelpiped is equal to the product of the length of its altitude and the area of its base.

Postulate 22. (Cavalieri's Principle) Given two solids and a plane. If for every plane that intersects the solids and is parallel to the given plane the two intersections determine regions that have the same area, then the two solids have the same volume.

School Mathematics Study Group, Geometry. New Haven: Yale University Press, 1961.

Fuente: http://www.msc.uky.edu/droyster/courses/fall11/MA341/index.htm

12.5 Birkhoff's Axioms for Euclidean Geometry.

Undefined Terms:
points A, B, ...
line - A set of points.
distance - The distance between any two points A and B is a non-negative real number d(A,B) such that d(A,B) = d(B,A)
angle - An angle is formed by three ordered points A, O, B ($A \neq O$, $B \neq O$) where $m(\angle AOB)$ is a real number (mod 2π). The point O is called the vertex of the angle.

Definitions
Between: If A, B and C are distinct points, we say that B is between points A and C if and only if d(A,B) + d(B,C) = d(A,C).
Line Segment: The points A and C together with all points B between A and C form the line segment AC.
Half-Line; Endpoint: The half-line m' with endpoint O is defined by two points O, A in line m ($A \neq O$) as the set of all points A' of m such that O is not between A and A'.
Parallel: If two distinct lines have no points in common they are parallel. A line is always regarded as parallel to itself.
Straight Angle; Right Angle; Perpendicular: Two half-lines m, n through O are said to form a straight angle if $m(\angle mOn) = \pi$. Two half-lines m, n through O are said to form a right angle if $m(\angle mOn) = \pi/2$, in which case we say that m is perpendicular to n.
Triangle; Vertices; Degenerate Triangle: If A, B, C are three distinct points the three segments AB, BC, CA are said to form a triangle with sides AB, BC, CA and vertices A, B, C. If A, B and C are collinear then triangle ΔABC is said to be degenerate.
Similar; Congruent: Any two geometric figures are similar if there exists a one-to-one correspondence between the points of the two figures such that all corresponding distances are in proportion and corresponding angles have equal measures (except, perhaps, for their sign). Any two geometric figures are congruent if they are similar with a constant of proportionality, k=1.

Postulates
Postulate I. Postulate of Line Measure. The points A, B, ..., of any line can be put into 1-to-1 correspondence with the real numbers x so that
|xa - xb| = d(A,B) for all points A and B.
Postulate II. Point-line Postulate. One and only one line, l, contains any two distinct points P and Q.
Postulate III. Postulate of Angle Measure. The half-lines (or rays) l, m, n, ..., through any point O can be put into 1-1 correspondence with the real numbers a (mod 2π) so that if A and B are points (other than O) of l and m, respectively, the difference am - al (mod 2π) of the numbers associated with lines l and m is $m(\angle AOB)$.
Postulate IV. Postulate of Similarity. If in two triangles ΔABC and $\Delta A'B'C'$ and for some constant k>0, d(A',B')=k d(A,B), d(A',C')=k d(A,C), and $m(\angle B'A'C') = m(\angle BAC)$, then also d(B',C')=k d(B,C), $m(\angle C'B'A') = m(\angle CBA)$, and $m(\angle A'C'B') = m(\angle ACB)$.

Sources: A Set of Postulates for Plane Geometry (Based on Scale and Protractors), G. D. Birkhoff, Annals of Mathematics, 33, 1932. Roads to Geometry, E. Wallace & S. West, Prentice-Hall (Sect 2.5 & App. C)

Fuente: http://www.msc.uky.edu/droyster/courses/fall11/MA341/index.htm

Bibliografia y fuentes.

[Aitken] Wayne Aitken: Este trabajo recoge materiales de innumerables fuentes de Internet, pero inicialmente utilicé los documentos pdf del profesor **Wayne Aitken**, que se encuentran en su página web personal:

http://public.csusm.edu/aitken_html/m410/

[Ivorra] Carlos Ivorra Castillo "Geometría".

[Prob2] Problemas de Matemáticas 2 (Recopilados por Gerard Romo)

http://www.toomates.net/biblioteca/Problemas2.pdf

13 Teoría de conjuntos.

13.1 Nociones básicas.

13.1.1 Definición. Elementos, conjuntos, inclusión.

La definición de conjunto es complicada. La propuesta tradicional de definir un conjunto como "una colección de elementos" es una pura falacia pues colección es un sinónimo de conjunto.

Así pues, dejaremos sin definir qué es un conjunto y supondremos que todo el mundo entiende qué es un conjunto de elementos.

Tenemos por un lado los "elementos", que escribiremos con letras minúsculas x,y,z...
Y por otro lado los "conjuntos", que escribiremos con letras mayúsculas A,B,C... y una relación entre ambos llamada inclusión:

$$x \in A$$

Y su negación

$$x \notin A$$

Subconjuntos.
Diremos que $A \subset B$ cuando $x \in A \Rightarrow x \in B$.
Diremos que $A = B$ cuando tienen los mismos elementos, es decir
$x \in A \Leftrightarrow x \in B$
Claramente $A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$

El conjunto vacío.
Definimos por $\varnothing$ el conjunto que no tiene elementos. Se cumple $\varnothing \subset A$ para cualquier conjunto A.

El conjunto universal. Conjunto complementario.
En ciertos contextos puede tener sentido hablar del conjunto universal Ω, formado por todos los elementos. En este contexto, dado un conjunto A, tiene sentido definir su conjunto complementario $\overline{A}$, formado por todos los elementos del conjunto universal que no están en A:

$$\overline{A} = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$$

Intersección e unión de conjuntos.
Definimos la intersección de dos conjuntos por

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

y la unión de dos conjuntos por

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Conjunto complementario.
Dados dos conjuntos A y B, definimos

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

Producto de dos conjuntos.
Dados dos conjuntos A y B definimos

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

Un caso particular muy importante son los conjuntos IR^n

$$IR^n = \underbrace{IR \times \ldots \times IR}_{\text{n veces}}$$

13.2 Funciones.

13.2.1 Definición. Función. Dominio y Codominio.
Dados dos conjuntos A y B, una función $f : A \to B$ es un subconjunto de $A \times B$ que cumple dos condiciones adicionales:
a) Para todo $a \in A$ existe un $b \in B$ tal que $(a,b) \in f$
b) Si $(a_1,b_1),(a_2,b_2) \in f$ y $a_1 = a_2$ entonces $b_1 = b_2$.

Notación: Si $(x,y) \in f$ se suele escribir $x \mapsto y$, o $y = f(x)$

Al conjunto A le diremos **dominio** de la función, y al conjunto B **codominio**.

13.2.2 Definición. Subconjunto imagen. Rango de una función. Función suprayectiva.
Dada una función $f : A \to B$ y $S \subset A$, diremos

$$\mathrm{f}(S) = \{y \in B \mid \exists x \in S, (a,y) \in f\} \subset B$$

Definimos el **rango** de la función como $\mathrm{f}(A)$.
Diremos que una función f es suprayectiva si $\mathrm{Imagen}(A) = B$, es decir, cuando todo elemento de B es imagen de al menos un elemento de A.

13.2.3 Definición. Subconjunto preimagen.
Dada una función $f : A \to B$ y $S \subset B$, diremos

$$\mathrm{f}^{-1}(S) = \{x \in A \mid \exists y \in S, (a,y) \in f\} \subset A$$

13.2.4 Definición. Composición de funciones.
Dadas dos funciones $f : A \to B$ y $g : C \to D$ cumpliendo $f(A) \subset C$, tiene sentido definir la composición $f \circ g : A \to D$ de la siguiente forma:
$(x,y) \in f \circ g \Leftrightarrow \exists z \in g(A) \mid (x,z) \in g \wedge (z,y) \in f$

13.2.5 Definición. La función indentidad.
Dado cualquier conjunto A, definimos la función Identidad de la siguiente forma:
$Id : A \to A$
$x \mapsto x$

13.2.6 Definición. Función inyectiva.
Diremos que una función $f : A \to B$ es inyectiva si
$(a_1,b_1),(a_2,b_2) \in f$ y $b_1 = b_2$ entonces $a_1 = a_2$

Es decir, cuando ningún elemento del codominio es imagen de más de un elemento del dominio.

13.2.7 Definición. Función inversa.
Si una función $f : A \to B$ es inyectiva, entonces tiene sentido definir su función inversa

$$f^{-1} : f(A) \to A$$

De la siguiente forma

$$(y,x) \in f^{-1} \Leftrightarrow (x,y) \in f$$

13.2.8 Proposición.
Para cualquier función inyectiva $f : A \to B$, se cumple $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = Id$

13.2.9 Definición. Biyección. Transformación.
Una biyección es una función $f : A \to B$ inyectiva y suprayectiva.
Una transformación es una biyección de un conjunto en sí mismo.

13.2.10 Definición. Grupo.
Un grupo es un conjunto de elementos G junto con una operación binaria $\bullet$ cumpliendo las siguientes propiedades:

G1. El conjunto G es un conjunto cerrado para la operación binaria.
G2. Propiedad asociativa: $a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$
G3. Existencia de elemento neutro: Existe un $i \in G$ tal que $i \bullet x = x \bullet i = x \ \ \forall x \in G$.
G4. Existencia de elemento inverso: $\forall x \in G \ \ \exists y \in G$ tal que $x \bullet y = y \bullet x = i$

13.2.11. Proposición.
El conjunto de transformaciones de un conjunto con la composición de funciones tiene estructura de grupo.

13.4 Relaciones de orden.

Fuente: “Apuntes de Teoría de Conjuntos” por Enrique Arrondo.

13.4.1 Definición. Relación de orden parcial y relación de orden estricto.
Se dice que R es una relación de **orden** (a veces también diremos relación de **orden parcial**) si es reflexiva, antisimétrica y transitiva:

a) **Reflexiva**: xRx.
b) **Antisimétrica**: xRy y zRz entonces x=y.
c) **Transitiva**: xRy y yRz entonces xRz.

en tal caso diremos que el par (Ω, R) es un conjunto ordenado.

Se dice que R es un **orden estricto** si es una relación asimétrica y transitiva:

a) **Asimétrica**: Nunca ocurre xRy y yRx a la vez.
b) **Transitiva** xRy y yRz entonces xRz.

Notación. Normalmente a una relación de orden la denotaremos por $\leq$ en lugar de R, y a la correspondiente relación de orden estricto <.

13.4.2 Teorema.
Sea X un conjunto. Entonces:
a) Si R es una relación de orden en X, entonces la relación

xSy si y sólo si xRy y $x \neq y$

es un orden estricto en X.
b) Si S es una relación de orden estricto en X, entonces la relación

xRy si y sólo si xSy o x=y

es un orden parcial en X.

Demostración.

13.4.3 Definición. Minimal, cota inferior, mínimo, ínfimo.
Sea X un subconjunto de un conjunto ordenado Ω.
Se llama **elemento minimal** de X a un elemento $x \in X$ para el que no exista $y \in X$ tal que $y < x$.
Se llama **cota inferior** de X a un elemento $x \in \Omega$ tal que $x \leq y$ para todo $y \in X$.
Se llama **mínimo** de X a una cota inferior que esté en X.
Se llama **ínfimo** de X al màximo de las cotas inferiores de X.

Y de la misma manera:
Se llama **elemento maximal** de X a un elemento $x \in X$ para el que no exista $y \in X$ tal que $x < y$.
Se llama **cota superior** de X a un elemento $x \in \Omega$ tal que $y \geq x$ para todo $y \in X$.
Se llama **máximo** de X a una cota superior que esté en X.
Se llama **supremo** de X al mínimo de las cotas superiores de X.

Se dice que X **no tiene extremos** si no tiene ni máximo ni mínimo.

Proposición. Unicidad del mínimo.
Sea X un subconjunto de un conjunto ordenado Ω. Si existe el mínimo de X, es necesariamente único. Se denotará por $Min(X)$.

Demostración. Supongamos que x e y son mínimos de X.
Se tiene que ambos son cotas inferiores de X, luego $x \le y$ y $y \le x$, y por tanto $x = y$.

Proposición.
Si $x = Min(X) \subset \Omega$ e $y < x$, entonces y es cota inferior de X.

Demostración. Si $z \in X$ y $z \neq x$ entonces $x < z$, y si además $y < x$, entonces $y < z$ por transitividad.
Si $z = x$ entonces $y < x \Rightarrow y < z$.

Ejemplo.
Sea $X = \left\{ \frac{1}{n} \in Q, n \in N \right\} \subset Q$.
X no tiene ningún elemento minimal, cualquier número racional negativo o cero es cota inferior, no tiene mínimo y su ínfimo es el 0.

Proposición.
Sea X un subconjunto de un conjunto ordenado Ω. Entonces $x \in \Omega$ es el mínimo de X si y sólo si $x \in X$ y además es el ínfimo de X.

Demostración.
Si $x \in \Omega$ es el mínimo de X, entonces por definición $x \in X$.
Sea Y el conjunto de todas las cotas inferiores de X. Queremos ver que x es el máximo de Y. En primer lugar, $x \in Y$ pues por definición es una cota inferior, y es cota superior de Y, pues si $y \in Y$, y es cota inferior de X, y puesto que $x \in X$, se tiene que $y < x$.
Recíprocamente, supongamos que $x \in X$ y además es el ínfimo de X. Por ser x ínfimo de X, x será cota inferior, luego si $y \in Y$ se tiene que $x < y$, luego es cota inferior de X.

Definición. Cadena. Conjunto totalmente ordenado.
Una **cadena** de un conjunto ordenado Ω es un subconjunto X tal que para cada dos elementos suyos x, y se verifica $x \le y$ o $y \le x$.
Un **orden total** o lineal en un conjunto Ω es un orden tal que todo Ω es una cadena. También diremos que Ω está **totalmente ordenado**.

13.4.5 Definición. Conjunto denso.
Sea Ω un conjunto totalmente ordenado. Se dice que un subconjunto X es **denso** (por supuesto se puede tomar $X = \Omega$) si, para cada dos elementos $x < y$ de X existe z de X tal que $x < z < y$.

13.5 Cortes. Cortes de Dedekind. Conjuntos completos.

Definición. Segmento inicial.
Se llama segmento inicial de un conjunto totalmente ordenado Ω a un subconjunto propio ($X \neq \Omega$) de Ω tal que

$$x \in X \wedge y < x \Rightarrow y \in X \ .$$

Como $x \in X$, podemos cambiar en la definición por la siguiente equivalente:

$$x \in X \wedge y \leq x \Rightarrow y \in X$$

Proposición.
Un subconjunto propio X de un conjunto totalmente ordenado Ω es segmento inicial si y sólo si todo elemento de $\Omega - X$ es cota superior de X.

Demostración.
$\Leftarrow$ Sea $x \in X \wedge y < x$. Si $y \in \Omega - X$ entonces es cota superior, es decir, $x < y$ contradiciendo la hipótesis, luego $y \in X$. Por lo tanto, X es segmento inicial.
$\Rightarrow$Sea $x \notin X$. Sea $y \in X$. Queremos ver $y < x$. Supongamos, por el contrario, que $x < y$. Entonces al ser X segmento inicial, $x \in X$, contradiciendo la hipótesis, luego $y < x$ y por lo tanto x es cota superior de X.

13.5.1 Definición. Los conjuntos A_x .
Sea Ω un conjunto totalmente ordenado.
Todo elemento Ω produce de forma natural un conjunto propio de la siguiente manera:
Si $x \in \Omega$, definimos

$$A_x = \{\, y \in \Omega \mid y < x \,\}$$

Proposición.
a) A_x es un segmento inicial.
b) A_x no está vacío si y sólo si x no es el mínimo de Ω.
c) $x = \min\{\, \Omega - A_x \,\}$

Demostración.
a) Claramente es propio pues $x \notin A_x$.

$$\left.\begin{array}{l} y \in A_x \Rightarrow y < x \\ z < y \end{array}\right\} \Rightarrow z < y < x \Rightarrow z < x \Rightarrow z \in A_x$$

b) Si A_x no está vacío entonces existe $y \in \Omega$ con $y < x$, luego x no puede ser cota inferior y por tanto no puede ser el mínimo de Ω.
Recíprocamente, si x no es el mínimo de Ω entonces no es cota inferior, y por lo tanto existe algún $y \in \Omega$ tal que $y < x$, y por tanto $y \in A_x$.
c) No se cumple $x < x$, luego $x \in \Omega - A_x$. El elemento x es cota inferior de $\Omega - A_x$, pues si $y \in \Omega - A_x$, no se cumple $y < x$, luego se cumple $x < y$ y por tanto es cota inferior.

Proposición.
Todo conjunto A_x es segmento inicial.

Demostración. Es 1.5.1a.

Proposición.
Sea Ω un conjunto totalmente ordenado y A un segmento inicial. Entonces $A = A_x$ para algún $x \in \Omega$ si y sólo si $\Omega - A$ tiene mínimo.

Demostración. Sea un segmento inicial A y supongamos que existe un $x \in \Omega$ para el cual $A = A_x$. Entonces $x \in \Omega - A$ pues no se puede cumplir $x < x$. Veamos que x es el mínimo de $\Omega - A$: Si $y \in \Omega - A$, $y \neq x$, entonces $y > x$, pues $y < x \Rightarrow y \in A_x$.

Recíprocamente, sea un segmento inicial X y supongamos que $x \in \Omega - A$ es el mínimo de $\Omega - A$. Veamos que entonces $A = A_x$.
Sea $y \in A$, si $x < y$ entonces por construcción $x \in A$, lo cual es absurdo porque x es el mínimo de $\Omega - A$. Luego $y < x$ y por tanto $y \in A_x$.
Sea $y \in A_x$. Entonces $y < x$, y por ser x mínimo de $\Omega - A$, no puede ser $y \in \Omega - A$, luego $y \in A$.

Definición. Corte. Corte de Dedekind.
Se llama **corte de Dedekind** en un conjunto totalmente ordenado a un segmento inicial no vacío $A \subset \Omega$ que no tiene máximo.

(En realidad, se suele llamar corte o corte de Dedekind al par $(A, \Omega - A)$, pero hemos preferido abreviar la notación).

Definición. Hueco.
Un **hueco** en un conjunto totalmente ordenado Ω es un corte de Dedekind A que no es de la forma A_x (y por la proposición ????, es equivalente a decir que $\Omega - A$ no tiene mínimo).

Proposición.
Sea S un conjunto no vacío de un conjunto totalmente ordenado Ω y definimos $A_S = \bigcup_{x \in S} A_x$. Entonces:
a) Si S está acotado superiormente, A_S es un segmento inicial.
b) Si S está acotado superiormente y no tiene máximo, A_S es un corte de Dedekind.
c) Si S tiene supremo x, $A_S = A_x$.
d) Si S es un corte de Dedekind, $A_S = S$.

Demostración.
a) Si $x \in A_S$ y $x' < x$, entonces $x' \in A_x$ que es uno de los elementos de la unión, luego $x' \in A_S$.

Sea $c \in \Omega$ cota superior de S. Entonces tal que $c > x \Rightarrow c \notin A_x \ \forall x \in S \Rightarrow c \notin A_S$, y por lo tanto A_S es propio.

b) Puesto que S no tiene máximo, no puede constar de un único elemento, pues en ese caso dicho elemento sería máximo. Luego existen al menos dos elementos distintos $a,b \in S$. Supongamos que $a < b$. Entonces $a \in A_b \Rightarrow a \in A_S$. Así pues, el conjunto A_S no está vacío.

Para ver que A_S no tiene máximo, veremos que ningún elemento suyo es cota superior. Sea $x \in A_S$. Entonces existe un $y \in S$ tal que $x < y$. Puesto que S no tiene máximo, el elemento y no puede ser cota superior, y por tanto existirá un $z \in S$ tal que $y < z$. Luego $y \in A_z \subset A_S$ y por tanto x no es cota superior.

c) Supongamos que S tiene supremo x, y queremos ver $A_S = A_x$.

Si $y \in A_S \Rightarrow \exists z \in S, y < z$, pero x es cota superior de S, luego $z < x$, y por tanto $y < z < x \Rightarrow y < x \Rightarrow y \in A_x$.

Supongamos que $y \in A_x$. Es decir, $y < x$. El elemento x es supremo de S, luego y no puede ser cota superior de S, por lo tanto existirá un $z \in S$ tal que $y < z$, y por lo tanto $y \in A_z \subset A_S$.

d) Sea $x \in A_S$. Luego $x < y$ para cierto $y \in S$. Puesto que S es segmento inicial, $x \in S$. Hemos demostrado que $A_S \subset S$.

Sea ahora $x \in S$. Puesto que S es un corte de Dedekind, no puede tener máximo, luego x no es máximo de S, y por tanto existirá un $y \in S$ tal que $x < y$. Luego $x \in A_y \subset A_S$. Esto demuestra que $S \subset A_S$.

Teorema.
Un conjunto totalmente ordenado Ω no tiene huecos si y sólo si todo subconjunto no vacío acotado superiormente tiene supremo.

Demostración.
Supongamos que Ω no tiene huecos. Sea S un subconjunto no vacío acotado superiormente. Sea $A_S = \bigcup_{x \in S} A_x$.

Por la proposición anterior, A_S será un segmento inicial (apartado a), que o bien tiene máximo (y por lo tanto tiene supremo) o bien no tiene máximo y por tanto es un corte de Dedekind (apartado b). Si es un corte de Dedekind, puesto que suponemos que no hay huecos, será de la forma A_x para cierto $x \in \Omega$, que será el mínimo de $\Omega - A_S$ y por tanto el supremo de S.

Recíprocamente, sea $S \subset \Omega$ un corte de Dedekind. Luego $S = A_S$, y puesto que es un segmento inicial, los elementos de $\Omega - S$ (que no está vacío) son cotas superiores, luego está acotado superiormente, por lo tanto por hipótesis tendrá supremo x, y en consecuencia $A_S = A_x$, luego $S = A_S = A_x$ y Ω no tiene huecos.

Definición. Conjunto completo.

Diremos que un conjunto totalmente ordenado Ω es **completo** si es denso y cada subconjunto no vacío y acotado superiormente tiene supremo. Es decir, cuando no tenga huecos.

13.6 Completación de conjuntos.

Subconjuntos. Conjunto potencia.
Se llama **subconjunto** de un conjunto X a un conjunto Y tal que todo elemento de Y es un elemento de X.
Axioma del Conjunto Potencia. Dado cualquier conjunto X, existe un conjunto, que denotaremos $P(X)$ tal que $x \in P(X)$ si y sólo si x es un subconjunto de X.

Teorema. Completación de un conjunto mediante cortes de Dedekind.
Sea Ω un conjunto totalmente ordenado, denso y sin extremos. Sea $\overline{\Omega}$ el conjunto de todos los cortes de Dedekind de Ω.
Definimos la siguiente función:

$$i : \Omega \to \overline{\Omega}$$
$$x \mapsto A_x$$

Esta función está bien definida pues por ???? todo conjunto A_x es segmento inicial.
A_x está no vacío pues al no tener Ω extremos, siempre podemos encontrar un $y < x$, es decir, $y \in A_x$.
A_x no tiene máximo pues si y es máximo de A_x, $y \in A_x \Rightarrow y < x$. Por ser Ω denso, existirá un $z \in \Omega$ tal que $y < z < x$, y por tanto $z \in A_x$, con $y < z$. Luego y no puede ser máximo.

La inclusión de conjuntos $A \subseteq B$ en $\overline{X}$ mantiene el orden de X:

$$x \le y \Leftrightarrow A_x \subseteq A_y$$
$$x < y \Leftrightarrow A_x \subset A_y$$

Si $x \neq y$, supongamos $x < y$, entonces claramente $A_x \subset A_y$, pues
$z \in A_x \Rightarrow z < x \Rightarrow z < y \Rightarrow z \in A_y$.
Pero por densidad, existirá un z tal que $x < z < y$, luego $z \in A_y$ pero $z \notin A_x$.
Veamos ahora que $A_x \subset A_y \Rightarrow x < y$: Si por el contrario, $y < x$, entonces $y \in A_x \subset A_y$, luego $y \in A_y \Rightarrow y < y$ absurdo.

Esta función es inyectiva: Acabamos de ver que $x < y \Rightarrow A_x \subset A_y$.

Identificando los elementos de Ω con sus imágenes A_x en $\overline{\Omega}$, tenemos que Ω es denso en $\overline{\Omega}$: Dados dos elementos $A, A' \in \overline{\Omega}$, $A < A'$, esto es, $A \subset A'$, sea $x \in A' - A$. Puesto que x no puede ser máximo de A', existirá un $y \in A'$ tal que $x < y$.
Claramente $y \notin A$, pues si $y \in A$ puesto que $x < y$ tendríamos $x \in A$.
Luego $A \subseteq A_y$, pues si $z \in A$, no se puede dar $y < z$, pues entonces $y \in A$. Luego $z < y$ y por tanto $A \subseteq A_y$. Pero $x \in A_y - A$. Por otro lado, $A_y \subset A'$, pero $y \in A' - A_y$, luego hemos demostrado la inclusión estricta $A \subset A_y \subset A'$.

El conjunto $\left(\overline{\Omega},\subseteq\right)$ está totalmente ordenado. Supongamos que $A,A'\in\overline{\Omega}$ cumplen $A\not\subset A'$. Existirá un $x\in A-A'$, luego por ser A' segmento inicial, $\forall y\in A', y<x$. Pero entonces, por ser A segmento inicial, $\forall y\in A', y\in A$, luego $A'\subseteq A$.

El conjunto $\left(\overline{\Omega},\subseteq\right)$ es denso, pues ya lo es $\Omega\subset\overline{\Omega}$ (recordamos que identificamos los elementos $x\in\Omega$ con sus imágenes $A_x\in\overline{\Omega}$).

El conjunto $\left(\overline{\Omega},\subseteq\right)$ no tiene huecos. Para demostrarlo utilizaremos la equivalencia demostrada en ????.
Sea $S\subseteq\overline{X}$ subconjunto no vacío y acotado superiormente de cortes de Dedekind. Esto quiere decir que existirá un corte de Dedekind A tal que $A'\subset A\,\forall A'\in S$.
Consideremos $S'=\underset{X\in S}{\cup}X$ y veamos que es el supremo de S.
En primer lugar veamos que es un corte de Dedekind:
Es propio pues está contenido en A que es propio.
Está no vacío pues cada uno de sus elementos está no vacío.
Es un segmento inicial, puesto que si $x\in S'$, y se cumple $y<x$, existirá un $X\in S$ tal que $x\in X$, y por ser X segmento inicial, $y\in X$, luego $y\in S'$.
S' no tiene máximo, pues si tuviera un máximo x, el elemento x tendría que pertenecer a algún $X\in S$, y sería máximo de este conjunto, lo cual es absurdo pues X es un corte de Dedekind.
S' es el supremo de S. Claramente es cota superior, pues $S\subseteq S'\,\forall S'\in S$, y para cualquier otra cota superior S'', claramente $S'\subseteq S''$.
Así pues, hemos demostrado que $\left(\overline{\Omega},\subseteq\right)$ no tiene huecos.

El conjunto $\left(\overline{\Omega},\subseteq\right)$ no tiene extremos. Esto se deduce fácilmente de que Ω tampoco los tiene. Sea $A\in\overline{\Omega}$. Sea $x\in A$. Entonces $A_x\subseteq A$ pero $x\notin A_x$, luego A no es mínimo de $\overline{\Omega}$. Por otro lado, $A\neq\Omega$, luego sea $y\in\Omega-A$. Por ser A segmento inicial, $y>x\,\forall x\in A$. Puesto que Ω no tiene máximo, existirá $z\in\Omega$ con $z>y$. Claramente $A\subset A_z$, pues $t\in A, t<y<z\Rightarrow t<z\Rightarrow t\in A_z$, y $z\notin A$ ($z\in A\wedge y<z\Rightarrow y\in A$).

Teorema.
Sea Ω un subconjunto denso en un conjunto totalmente ordenado Ω', y supongamos que ni Ω ni Ω' tienen extremos.

Hemos visto que podemos considerar $\Omega\subset\overline{\Omega}$ mediante la inmersión

$$x\mapsto A_x=\left\{\,y\in\Omega\,|\,y<x\,\right\}\subset\Omega$$

De la misma forma, podemos considerar $\Omega'\subset\overline{\Omega'}$ mediante la inmersión

$$x\mapsto A'_x=\left\{\,y\in\Omega'|\,y<x\,\right\}\subset\Omega'$$

Está claro que $A_x\subseteq A'_x$.

Entonces existe un isomorfismo $f:\overline{\Omega}\to\overline{\Omega'}$

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \subset & \Omega' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{\Omega} & \overset{f}{\rightarrow} & \overline{\Omega'} \end{array}$$

Demostración.

Definimos la función $f:\overline{\Omega}\rightarrow\overline{\Omega'}$ de la siguiente manera:

Si $B\in\overline{\Omega}$ es un corte de Dedekind, $f(B)=\underset{x\in B}{\cup}A'_x\subset\Omega'$

La función está bien construida pues B está acotado superiormente y no tiene máximo, y aplicando ???? garantizamos que $f(B)$ es un corte de Dedekind. En efecto, $B\subset\Omega'$ está acotado superiormente pues lo estaba como subconjunto de Ω, y no tiene máximo, pues si $x\in\Omega'$ es máximo de $B\subset\Omega'$, entonces $x\in B$ y por tanto x sería máximo de B como subconjunto de Ω.

La función f claramente preserva inclusiones:

$$B,B'\in\overline{\Omega},\ B<B'\Leftrightarrow B\subset B'\Rightarrow f(B)\subset f(B')$$

es una propiedad de la teoría de conjuntos.

Para demostrar que f es un isomorfismo construiremos su función inversa. Definimos $g:\overline{\Omega'}\rightarrow\overline{\Omega}$ de la siguiente manera:

Si $B'\in\overline{\Omega'}$ es un corte de Dedekind, $g(B')=B'\cap\Omega\subset\Omega$

Veamos en primer lugar que esta función está bien definida, es decir, que $B'\cap\Omega$ es un corte de Dedekind de Ω.

- $g(B')$ no está vacío: Puesto que $B'\subset\Omega'$ es un corte de Dedekind, no puede estar vacío, y puesto que no tiene máximo, no puede constar de un solo elemento, pues en dicho caso ese elemento sería el máximo. Luego existen $x<y\in B'$. Puesto que Ω es denso en Ω', existirá un $z\in\Omega$ tal que $x<z<y$. Por ser segmento inicial, $z\in B'$, y por tanto $z\in B'\cap\Omega$.
- $g(B')$ es un segmento inicial: Sea $x\in g(B')$, esto es, $x\in B'\cap\Omega$. Sea $y\in\Omega$ tal que $y<x$. Luego entendiendo x e y como elementos de Ω', por ser B' un segmento inicial deducimos que $y\in B'$, luego $y\in B'\cap\Omega=f(B')$.
- $g(B')$ es propio: B' es propio en Ω', luego existe $x\in\Omega'-B'$. B' no tiene extremos, luego existirá $y\in\Omega'$ tal que $x<y$. Por ser Ω denso en Ω', existirá un $z\in\Omega$ tal que $x<z<y$. Está claro que $z\notin B'$, pues $z\in B'\Rightarrow x\in B'$. Luego $z\in\Omega-g(B')$.
- $g(B')$ no tiene máximo: Supongamos que $m\in g(B')=B'\cap\Omega$ es cota superior de $B'\cap\Omega$. Puesto que B' no tiene máximo, existirá un $x\in B'$ tal que $m<x$. Por densidad de Ω en Ω', existirá un $y\in\Omega$ tal que $m<y<x$. Luego por ser B' segmento inicial, $y\in B'\Rightarrow y\in B'\cap\Omega=g(B')$. Luego m no puede ser máximo de $g(B')$, porque $m<y$ con $y\in g(B')$.

- Si $B\in\overline{\Omega}$, $g(f(B))=B$.

$$g(f(B))=f(B)\cap\Omega=\left(\underset{x\in B}{\cup}A'_x\right)\cap\Omega=\underset{x\in B}{\cup}\left(A'_x\cap\Omega\right)=\underset{x\in B}{\cup}A_x=A$$

Las dos primeras igualdades son definiciones. La tercera es una propiedad de la teoría de conjuntos. La cuarta se basa en la igualdad

$x \in B \Rightarrow A'_x \cap \Omega = A_x$

En efecto, $y \in A'_x \cap \Omega \Leftrightarrow y \in \Omega \wedge y < x \Leftrightarrow y \in A_x$

La última igualdad se demostró en ????.

- Si $B' \in \Omega'$, $f(g(B')) = B'$.

Desarrollando la igualdad: $B' = f(g(B')) = \bigcup_{x \in g(B')} A'_x = \bigcup_{x \in B' \cap \Omega} A'_x$.

$\subseteq$. Si $x \in B'$, al no tener máximo, existirá un $y \in B'$, $x < y$. Por densidad de Ω en Ω', existirá un $z \in \Omega$ tal que $x < z < y$. Por ser B' segmento inicial, $z \in B'$. Luego $x \in A'_z$, con $z \in B' \cap \Omega$. Luego $x \in \bigcup_{x \in B' \cap \Omega} A'_x$.

$\supseteq$ Sea $x \in \bigcup_{x \in B' \cap \Omega} A'_x$, es decir, existe un $y \in B' \cap \Omega$ tal que $x \in A'_y$, esto es, $x < y$. Por ser $B' \cap \Omega$ un segmento inicial, $x \in B' \cap \Omega \subseteq B'$.

Así pues, hemos demostrado que f y g son funciones inversas la una de la otra.

Es obvio que f (y los mismo g) preserva inclusiones. Además, como es biyectiva, preserva también los contenidos estrictos. Por tanto f es un isomorfismo.
Finalmente, demostrar que la restricción de f a Ω es la inclusión de Ω en Ω' es equivalente a decir $f(A_x) = A'_x$ para todo $x \in \Omega$. Como g es la inversa de f, es equivalente a decir $f(A'_x) = A_x$, que es evidente.

Teorema.
Sea Ω' una compleción de un conjunto totalmente ordenado Ω denso y sin extremos. Entonces existe un isomorfismo $\overline{\Omega} \to \Omega'$ que restringido a Ω es la identidad.

Demostración.
Aplicando el teorema anterior, tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \subset & \Omega' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{\Omega} & \overset{f}{\to} & \overline{\Omega'} \end{array}$$

En el que la columna de la derecha es un isomorfismo, por lo que su función inversa también será un isomorfismo. Basta tomar $h \circ f \circ g$ como en el esquema siguiente:

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \subset & \Omega' \\ \downarrow g & & \uparrow h \\ \overline{\Omega} & \overset{f}{\to} & \overline{\Omega'} \end{array}$$

Definición. Compleción.
Dado un conjunto totalmente ordenado Ω, denso y sin extremos, llamaremos compleción de Ω a un conjunto ordenado Ω' tal que:
i) $\Omega \subset \Omega'$, el orden de Ω' restringido a Ω es el orden de Ω y además Ω es denso en Ω'.
ii) Ω' es un conjunto totalmente ordenado, completo y sin extremos.

14 Los números naturales.

15 Los números enteros.

15.1 Construcción de los números enteros.

15.1.1 Definición. Los números enteros.

El conjunto de números enteros Z se define como el conjunto de clases de equivalencia $Z = (IN \times IN)/\sim$

$$\text{donde } (a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow a+d = c+d$$

Cada una de estas clases de equivalencia las podemos representar de la forma $[a-b]$

Tenemos una inyección canónica

$$i : IN \to Z$$
$$n \mapsto (n,0)$$

Orden en Z.
Dotamos a Z de un orden de la siguiente manera:

$$(a,b) < (c,d) \Leftrightarrow a+d < c+d$$

16 Los números racionales.

16.1 Construcción de los números racionales.

16.1.1 Definición. El conjunto de fracciones.

Consideremos el conjunto de pares ordenados $(m,n) \in Z \times Z^+$.

Estos elementos se denominan **fracciones** y se suelen escribir de la forma habitual "numerador-barra-denominador":

$$(m,n) = \frac{m}{n}$$

Observamos que hemos excluído de entrada las fracciones con denominador cero.

16.1.2 Definición. Fracciones equivalentes.

En el conjunto de fracciones definimos la siguiente relación ~:

$$(\mathrm{a},\mathrm{b}) \sim (\mathrm{c},\mathrm{d}) \Leftrightarrow \mathrm{a} \cdot \mathrm{d} = \mathrm{b} \cdot c$$

Esta relación formaliza la idea de dos fracciones "iguales":

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

16.1.3 Proposición.

La relación ~ define una relación de equivalencia en el conjunto de fracciones.

Demostración.

16.1.4 Definición. El conjunto de números racionales.

Definimos el conjunto de números racionales Q como el conjunto de clases de equivalencia:

$$Q = \left(Z \times Z^+\right) / \sim$$

16.1.5 Definición. Suma de números racionales.

Definimos la suma de dos números racionales de la siguiente manera:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$$

16.1.6 Definición. Producto de números racionales.

Definimos el producto de dos números racionales de la siguiente manera:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

16.1.7 Definición. Ordenación de números racionales.

Definimos un orden en el conjunto de los números racionales de la siguiente manera:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d < b \cdot c$$

16.1.8 Definición. Inmersión canónica de Z en Q.
Podemos considerar el conjunto de números enteros como un subconjunto de los números racionales mediante la siguiente inmersión, llamada “inmersión canónica”:

$$Z \to Q$$

$$n \mapsto \frac{n}{1}$$

16.2 La propiedad arquimediana.

16.2.1 Teorema. Propiedad arquimediana.
Dados dos números racionales $a > 0$ y $b > 0$, existirá un número natural n tal que $n\,a > b$.

Demostración.

Supongamos que $a = \frac{p}{q}$ y $b = \frac{r}{s}$ para ciertos p, q, r y s naturales.

Tomando $n = 2qr$, está claro que $n\,qs = 2qrps > qr \Rightarrow n\,a > b$

16.2.2 Teorema. Caracterización de los cuerpos arquimedianos.
Sea F un cuerpo ordenado. Es equivalente:
a) F es arquimediano.
b) Para cada $x \in F$, existe un $n \in N$ tal que $x < n$, es decir, los números naturales no están acotados superiormente.
c) Para cada $x \in F$, existen $n, m \in Z$ tales que $x < n \;\; m < x$ y es decir, los números enteros no están acotados, ni superiormente ni inferiormente.
d) $Inf\left\{\frac{1}{n}, n \in N\right\} = 0$
e) $Inf\left\{\frac{1}{2^n}, n \in N\right\} = 0$

16.3 La raíz de 2 no pertenece a los números racionales.

16.3.1 Definición. Números pares e impares.
Un entero positivo par es el que se puede escribir en la forma 2n, para algún entero positivo n.
Un entero positivo impar es aquel que se puede escribir en la forma 2n + 1 para algún entero $n \geq 0$.

16.3.2 Proposición.
El cuadrado de un número par es par. El cuadrado de un número impar es impar.

Demostración.
Si k es par, $k = 2n$, y por tanto $k^2 = (2n)^2 = 2 \cdot 2n^2$ y es par.
Si k es impar, $k = 2n+1$, y por tanto
$k^2 = (2n+1)^2 = (2n)^2 + 2n \cdot 1 + 1^2 = 4n^2 + 2n + 1 = 2(2n^2 + n) + 1$ y por lo tanto es impar.

16.3.3 Corolario.
Si el cuadrado de un número es par, entonces ese número es par.

Demostración.
Si $k = n^2$ es par, n tiene que ser par, pues de lo contrario su cuadrado sería impar, contradiciendo la hipótesis.

16.3.4 Teorema.
La ecuación $x^2 = 2$ no tiene solución en Q.

Demostración.
Sea $x \in Q$ solución de $x^2 = 2$. Escribimos x en forma de fracción simplificada como $x = \frac{n}{m}$.
$x^2 = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{n}{m}\right)^2 = 2 \Leftrightarrow \frac{n^2}{m^2} = 2 \Leftrightarrow n^2 = 2m^2$. Luego n^2 es par, y por tanto, por el corolario anterior, n es par. Luego podemos escribir $n = 2k$ para cierto natural k.
Entonces $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 \Rightarrow 4k^2 = 2m^2 \Rightarrow 2k^2 = m^2$, es decir m^2 es par. Nuevamente por el lema anterior, deducimos que m es par, con lo que tenemos una fracción en la que numerador y denominador son divisibles entre dos, es decir, que se puede simplificar, contradiciendo la hipótesis de haber tomado una fracción irreducible.

17 Números reales.

17.1 Construcción de los números reales mediante cortes de Dedekind.

17.1.1 Definición. Conjunto de los números reales.

En todo este apartado seguiremos punto por punto las construcciones y resultados del apartado ????.

Recordamos que un corte de Dedekind es todo conjunto de números racionales $D \subset Q$ cumpliendo las siguientes propiedades:

a) $D \neq \varnothing$, $D \neq Q$.
b) $\forall q \in D$, $p < q \Rightarrow p \in D$ (es segmento inicial)
c) $\forall p \in D \; \exists q \in D,\; p < q$ (no tiene máximo)

Definimos R como el conjunto de todos los cortes de Dedekind de Q.

17.1.2 Definición. La inmersión canónica de Q en R.

Podemos considerar el conjunto de números racionales como un subconjunto de los números reales mediante la siguiente inmersión, llamada "inmersión canónica":

$$Q \to R$$
$$p \mapsto i(p) = \{ q \in Q \mid q < p \}$$

Esta función está bien construida pues ya vimos en ???? que $i(p)$ es un corte de Dedekind.

17.1.3 Proposición.

En ???? vimos que R, construido de esta manera, cumple las siguientes propiedades:

a) Es completo
b) No tiene extremos.
c) $Q \subset R$ es denso.

Y cualquier otra completación de Q será isomorfa.

17.2 Funciones trigonométricas.

17.2.1 Definición.
Definimos las funciones trigonométricas de forma analítica, es decir, independientemente del concepto geométrico de ángulo. Estas funciones están definidas para todo $x \in IR$:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Definimos la función tangente como cociente de las funciones anteriores:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

18 Los números complejos.

18.1 Construcción de los números complejos.

18.1.1 Definición. El conjunto de números complejos.

El conjunto de números complejos es $C = IR \times IR$. En este conjunto definimos tres elementos notables:

$$0 = (0,0)$$
$$1 = (1,0)$$
$$i = (0,1)$$

18.1.2 Definición. Suma de números complejos.

Se define la suma de números complejos de la forma habitual:

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = (a,b) \\ z_2 = (c,d) \end{array}\right\} \Rightarrow z_1 + z_2 = (a+b, c+d)$$

Claramente el 0 es elemento neutro respecto de la suma.

18.1.3 Definición. Producto de números complejos.

Se define el producto de números complejos de la siguiente forma:

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = (a,b) \\ z_2 = (c,d) \end{array}\right\} \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = (ac - db, ad + bc)$$

Claramente el 1 es elemento neutro respecto del producto:

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = (a,b) \\ z_2 = (1,0) \end{array}\right\} \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = (a1 - 0b, a0 + 1b) = (a,b)$$

18.1.4 Proposición. Las raíces de –1.

$$i^2 = -1$$

Por lo tanto i es una raíz cuadrada de –1. Pero observamos que $-i$ también es otra raíz cuadrada de –1: $(-i)^2 = (0,-1)(0,-1) = (0\cdot 0 - (-1)\cdot(-1), 0\cdot(-1) + (-1)\cdot 0) = (1,0) = 1$. Diremos que i es la **raíz cuadrada principal** de –1.

Demostración.

$i^2 = i \cdot i = (0,1)\cdot(0,1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1, 0\cdot 1 + 0\cdot 1) = (-1,0) = -1$

18.1.5 Notación.

Todo número complejo (a,b) se puede escribir de la forma $a + bi$:

$(a,b) = a(1,0) + b(0,1) = a1 + bi = a + bi$

Esta notación simplifica mucho las operaciones con números complejos. Por ejemplo, para multiplicar complejos sólo tenemos que utilizar las propiedades asociativa y distributiva y recordar que $i^2 = -1$

$$(a+bi)\cdot(c+di)=a(c+di)+bi(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=ac+adi+bci-bd=$$
$$=ac-bd+(ad+bc)i$$

18.1.6 Definición. La inclusión canónica $IR\subset C$.
El conjunto de números reales se puede entender como un subconjunto de los números complejos mediante la inclusión canónica

$$\tau : IR \to C$$
$$x \mapsto (x,0)$$

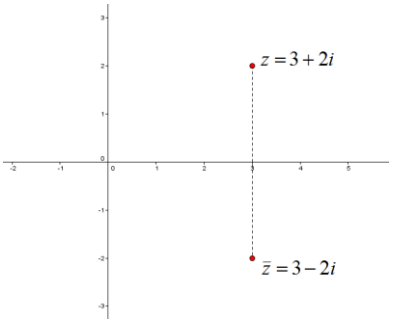
18.2 Conjugado, módulo y argumento.

18.2.1 Definición. Conjugado de un número complejo.

Dado $z = a + bi$, se define su conjugado $\bar{z}$ por

$$\bar{z} = a - bi$$

Es decir, es su simétrico respecto del eje X:



18.2.2 Proposición.

$$z = a + bi \Rightarrow z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$$

Demostración.

$$z = a + bi \Rightarrow z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2 i^2 = a^2 + b^2$$

18.2.3 Observación. División de números complejos.

Dividir números complejos es muy parecido a racionalizar denominadores.
Multiplicaremos numerador y denominador por el conjugado del denominador.

Ejemplo:

Queremos expresar $\dfrac{-1+3i}{2+5i}$ de la forma $a + bi$.

Multiplicaremos numerador y denominador por $2 - 5i$:

$$\frac{-1+3i}{2+5i} = \frac{(-1+3i)(2-5i)}{(2+5i)(2-5i)} = \frac{13+11i}{2^2+5^2} = \frac{13}{29} + \frac{11}{29}i$$

18.2.4 Proposición. Propiedades del conjugado.

$$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$$

$$\overline{z\,w} = \bar{z}\,\bar{w}$$

$$\overline{z^n} = \bar{z}^n$$

Demostración.

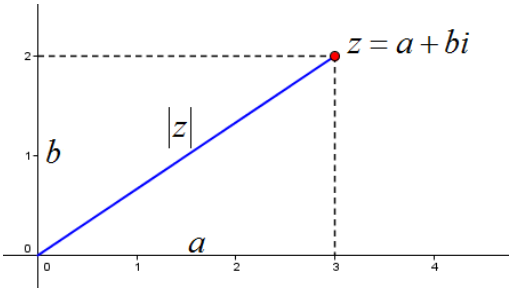
Queda como ejercicio.

18.2.5 Definición. Módulo de un número complejo.

Dado $z = a + bi$, se define su módulo $|z|$ por

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Es decir, es la longitud del vector (a,b)



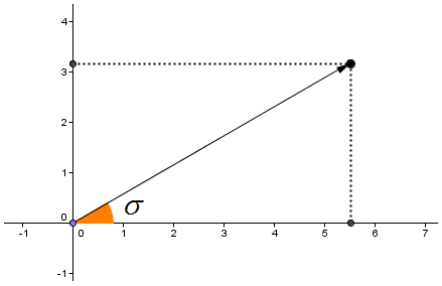
18.2.6 Observación 1.

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z}$$

18.2.7 Observación 2.
El procedimiento para dividir números complejos del ejemplo 1.2.3 se puede generalizar:

$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \overline{w}}{w \cdot \overline{w}} = \frac{z \cdot \overline{w}}{|w|^2}$$

18.2.8 Definición. Argumento de un número complejo.
Todo número complejo $z = a + bi$ tiene asociado un ángulo σ entre 0 y 2π (o entre 0 y 360). A este ángulo le llamaremos **argumento** de z, $Arg(z)$:



Este ángulo se determina mediante la función arcotangente:

$$\sigma = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \in [0, \pi)$$

Pero se debe tener en cuenta el cuadrante en el que está el número para evitar las cancelaciones de signo entre numerador y denominador.

18.2.9 Proposición.
Se cumple $Arg(z \cdot w) = Arg(z) + Arg(w)$

Demostración.

18.2.10 Corolario.
Se cumple $Arg\left(z^n\right) = n\, Arg(z)$

Demostración.

18.3 Notación polar.

18.3.1 Definición. Números complejos en forma polar.

Hemos visto que todo número complejo $z = a + bi$ tiene asociados dos números reales:

Su **módulo**:

$$m = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \in [0, +\infty)$$

Y su **argumento**:

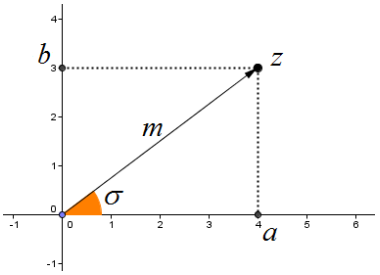
$$\sigma = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \in [0, 2\pi)$$

Estos dos números (m, σ) determinan unívocamente cualquier número complejo, exceptuando el cero, que puede estar representado por cualquier par $(0, \sigma)$.

Los pares (m, σ), donde $m \in [0, +\infty)$ y $\sigma \in [0, 2\pi)$ se denominan **representación polar** del número complejo $z = a + bi$.

Se cumple:

$$\begin{cases} a = m\cos\sigma \\ b = m\sin\sigma \end{cases}$$



18.4 Notación exponencial.

18.4.1 Definición. Notación exponencial.

Definimos el número complejo $e^{\sigma i}$ de la siguiente manera:

$$e^{\sigma i} = \cos\sigma + i\sin\sigma$$

18.4.3 Proposición. La fórmula de Euler.

$$e^{\pi i} - 1 = 0$$

Demostración.

Efectivamente, por la definición anterior, $e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = 1 + i \cdot 0 = 1$

18.4.4 Proposición. Números complejos en forma exponencial.

Todo número complejo $z = a + bi$ se puede expresar de la forma $me^{\sigma i}$,
Donde m y σ se definieron en 12.3.1.